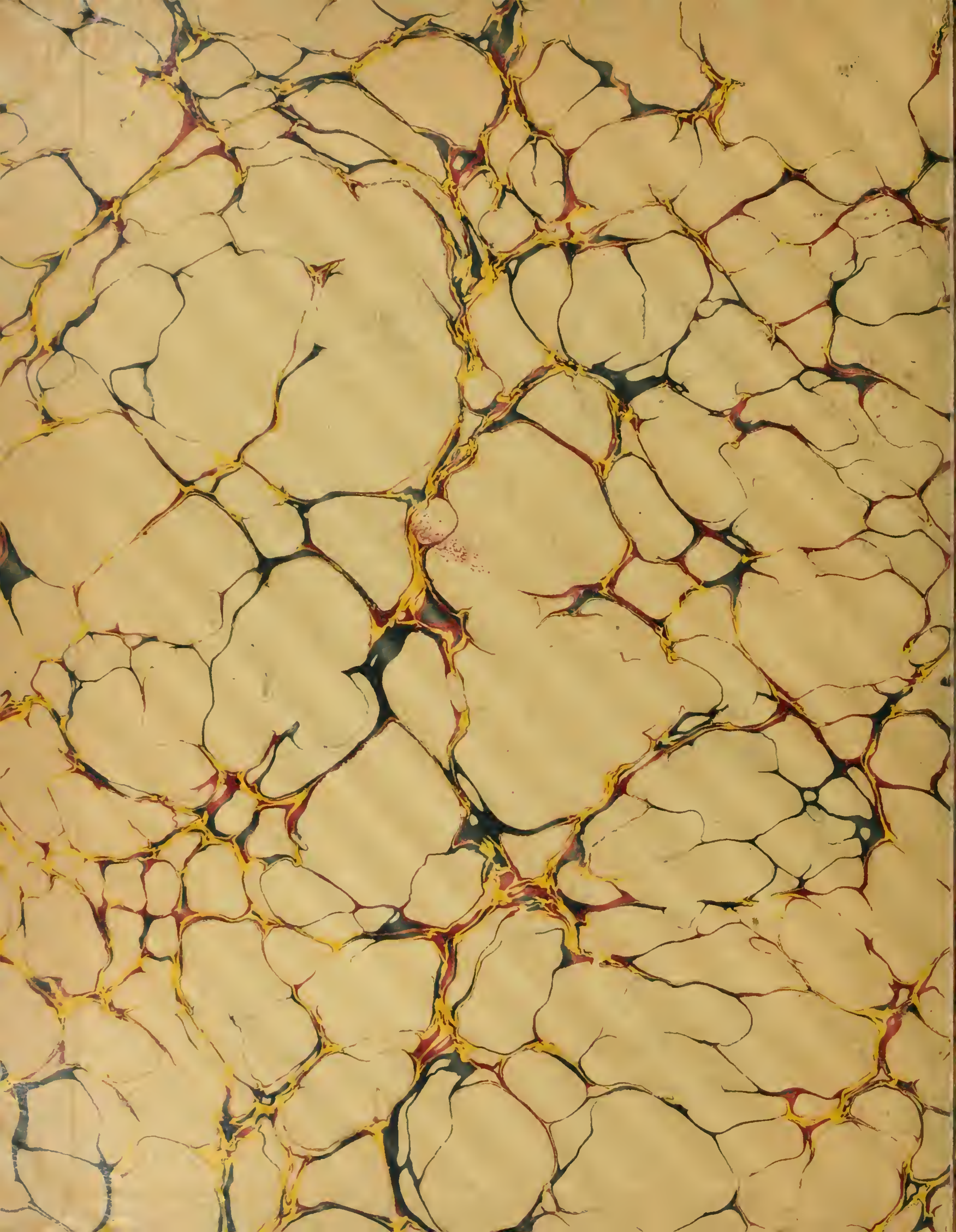
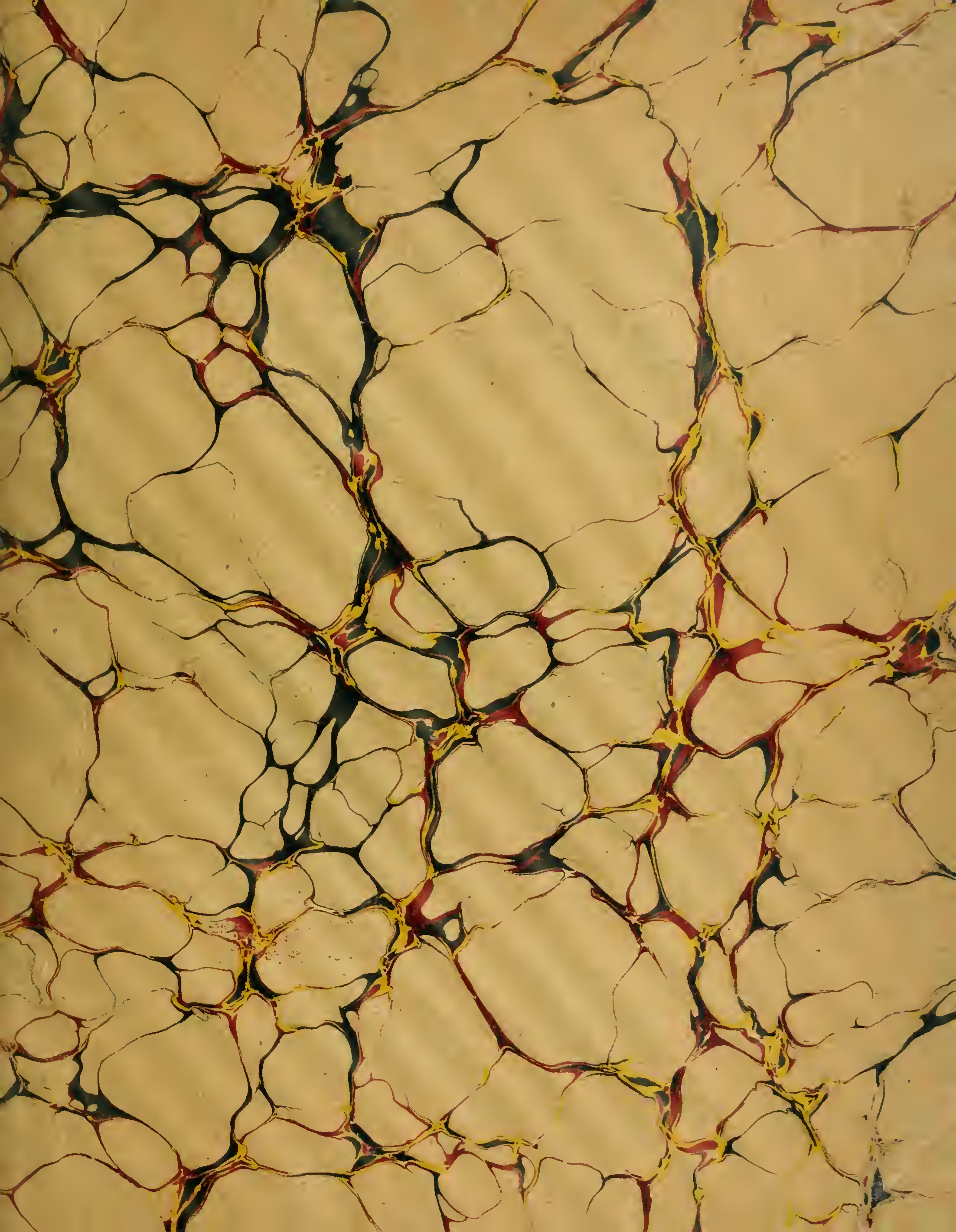

UNIVERSITY OF TORONTO
3 1761 01203755 2





ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS.

Imprimerie de JOH. ENSCHEDÉ & FILS, Harlem.



ŒUVRES COMPLÈTES

DE

CHRISTIAAN HUYGENS

PUBLIÉES PAR LA

SOCIÉTÉ HOLLANDAISE DES SCIENCES

TOME ONZIÈME

TRAVAUX MATHEMATIQUES
1645—1651

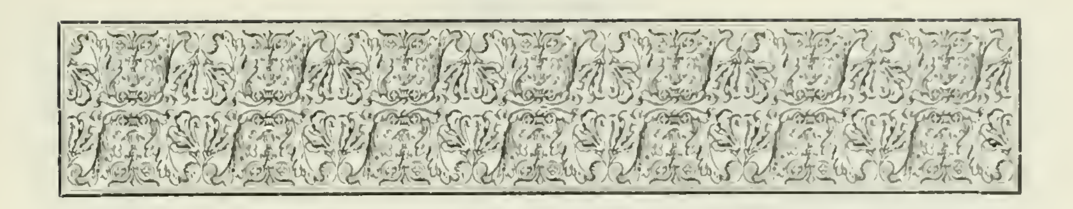


LA HAYE
MARTINUS NIJHOFF
1908

TRAVAUX MATHÉMATIQUES
1645—1651.

TRAVAUX DIVERS DE JEUNESSE.

1645—1646.



Avertiſſement.

Sous le titre de „Travaux divers de Jeuneſſe" nous réuniſſons pluſieurs pièces, compoſées par Huygens en 1645 ou 1646, c'eſt-à-dire dans la dix-septième et la dix-huitième année de ſa vie.

Évidemment ces pièces, ſauf quelques exceptions, [1]) ne peuvent avoir que peu de valeur ſcientifique; mais il nous ſemble qu'il y a un certain intérêt à connaître ces premiers eſſais, qui nous montrent de quels ſujets Huygens a commencé à s'occuper, par quelles voies ſes facultés extraordinaires ſe ſont développées et de quelle manière ſon eſprit a été préparé aux travaux plus importants qui ſuivront bientôt.

Et c'eſt dans ce même but que nous faiſons précéder ces pièces de l'aperçu d'un manuſcrit de Frans van Schooten, profeſſeur de mathématiques à l'école des ingénieurs dépendant de l'univerſité de Leiden. Ce manuſcrit deſtiné probablement, au moins pour ſa plus grande partie [2]), à l'uſage perſonnel de Chriſ-

---

[1]) Parmi les exceptions nous voudrions compter le N°. VI „De catena pendente" (p. 37), le N°. XIV „De motu naturaliter accelerato" (p. 68) et aussi les pièces N°. XI (p. 56) et N°. XV (p. 76) qui traitent, avec une originalité incontestable, la quadrature de la parabole, la cubature de divers solides de révolution engendrés par cette courbe, et la cubature du segment sphérique, laquelle Huygens fait dépendre de la quadrature de la parabole. De plus, la pièce N°. XIII sur la Gnonomique (p. 64), considérée comme l'œuvre d'un garçon de 17 ans, nous semble bien remarquable par la simplicité et la lucidité de l'exposition.

[2]) Comparez la note 6 de la pièce N°. I.

tiaan Huygens, lui a fervi en tout cas pour fes études, comme le témoignent les annotations que l'on y trouve de fa main; il nous permet de nous former une idée très précife de l'inftruction mathématique donnée par le profeffeur van Schooten à fon jeune élève pendant le féjour à Leiden de 1645 à 1647 et sur la folidité et l'étendue d'un enfeignement où l'on voit apparaître fucceffivement l'œuvre de Diophante, de Viète, de Descartes, de Pappus, d'Apollonius et de Fermat.

Les autres pièces ont toutes été empruntées à un petit manuscrit (le N°. 17 du Codex Hugeniorum) commencé par Huygens, un peu avant ou après fon départ, en mai 1645, pour Leiden, où il allait étudier le droit et les mathématiques.

Une feule fois ce manufcrit eft mentionné explicitement dans la Correfpondance; c'eft dans la Lettre N°. 11, du 3 feptembre 1646, adreffée au frère Conftantijn, où (p. 19 de notre T. I), après une énumération de divers fujets dont il s'eft occupé et qui fe retrouveront dans les pièces N°. XI et N°. XIV, Chriftiaan écrit: „de tout cecij et encor d'une infinité de chofes qui en dépendent je n'aij jamais fçeu la démonftration avant que de l'inventer moij mefme, vous la trouverez à voftre retour, dans le „boeckje" [livret] de voftre trefaffectione frere Chreftien Huygens."

La plupart et les plus importantes des pièces que nous donnons et qui traitent alternativement la théorie des nombres [3]), l'algèbre et fon application à la planimétrie [4]), la ftéréométrie [5]), les coniques [6]), les queftions „de maximis et minimis" [7]), les quadratures et les cubatures [8]), la mécanique [9]) et la gnonomique [10]), ont été compofées dans la feule année 1646 durant le féjour à Leiden ou pendant les vacances. Elles fe font fuivies à peu près dans l'ordre où nous les avons mifes, lequel eft en fubftance celui du „boeckje". Et ce n'eft pas là toute l'œuvre de 1646, puisque parmi les travaux énumérés par Huygens dans la lettre N°. 23^b (p. 557 du T. II) à Merfenne, du 23 décembre 1646, on en rencontre quelques-uns dont nous n'avons pas trouvé de traces.

Voici cette énumération: „Il y a beaucoup d'autres chofes" [en outre de

[3]) La pièce N°. VII sur les nombres parfaits (p. 45).
[4]) Les pièces N°. II, III et X (pp. 21, 23 et 53).
[5]) La pièce N°. IX (p. 50).
[6]) Les pièces N°. IV et XII (pp. 28 et 61).
[7]) La pièce N°. VIII (p. 46).
[8]) Les pièces N°. XI et XV (pp. 56 et 76).
[9]) Les pièces N°. V, VI et XIV (pp. 34, 37 et 68).
[10]) La pièce N°. XIII (p. 64).

l'„affaire de la chaisne" [11])] „que j'ay ainsi par la teste sans les avoir escrites encore, mais seulement calculées par lettres, comme sont les centres de gravité de beaucoup de choses[12]) entre autres de la sphère, du cercle, du Conoide hyperbolique, et de leur segments; les tangentes, quadratures, et centres de gravité de la parabole et des espaces contenus des courbes dont vous escrivez au volume tres-docte de physiomathematique [13]), en la prefation des mechaniques. Une autre démonstration de ce qui est contenu au livre d'Archimède, de sphaera et cylindro[14]), et de Conoïdibus et sphaeroidibus[15]), mais rien encore de ce qui concerne les centres de percussion, dont vous m'avez escrit par vostre dernière."

Des trois années qui suivent, jusqu'en 1650, nous ne possédons que très peu de travaux [16]). Nous savons toutefois que dans cet intervalle les „Theoremata de Quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro" et l'„Ἐξέτασις Cyclometriae Cl. Viri Gregorii à S. Vincentio" furent préparés [17]) et que les études de droit commencées à Leiden furent poursuivies et terminées à l'„Ecole illustre" de Bréda.

Avant de finir nous voulons dire encore un mot sur l'écriture de Christiaan Huygens. Pendant la période juvénile que nous traitons, cette écriture n'était pas encore fixée, comme on peut le voir en comparant l'autographe de la première page du travail „De catena pendente," que nous donnons au commencement de cette pièce, avec celui d'une lettre de la même année 1646, que l'on trouve à la

[11]) Voir la pièce N°. VI (p. 37).

[12]) Ces travaux sur les centres de gravité nous sont inconnus. Lipstorp, qui pendant son séjour à Leiden en 1651 et 1652 semble avoir beaucoup fréquenté Christiaan Huygens, les mentionne de même dans ses „Specimina Philosophiae Cartesianae" de 1653, ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 154 (p. 227 du T. I). Après avoir parlé des „Theoremata" et de l'„Ἐξέτασις", il fait suivre à la page 15 de la „Pars prima": „Et optamus tandem copiam illius, quod jam elaborasse nobis nunciatum est de iis quae fluido superinnatant. Et de centris gravitatum: ut & de Refractionis legibus."

[13]) Voir la première et la seconde page de la „Praefatio" du „Tractatus Mechanicus", ouvrage cité dans la note 2 de la Lettre N°. 20 (p. 34 du T. I). Il s'agit des paraboles de divers degrés: $y^n = ax^m$.

[14]) La pièce N°. XV (p. 76).

[15]) Comparez la note 7 de la pièce N°. XI (p. 59).

[16]) La pièce N° 39 à date inconnue, p. 74 du T. I. En 1648 la pièce N°. 22, p. 40 du T. I, et peut-être aussi la pièce N°. 21 (Comparez la note 2 de la pièce N°. VI). En 1649 la pièce N°. 68, p. 115 du T. I.

[17]) Voir les „Avertissements", dont nous ferons précéder ces ouvrages dans l'édition présente. Très probablement le traité sur les centres de gravité, mentionné par Lipstorp, a été écrit aussi pendant ces années et peut-être les recherches sur la „dioptrique" furent-elles commencées.

fin du Tome II, et avec l'écriture de Huygens telle qu'elle s'est développée plus tard, pour laquelle les autographes vis-à-vis des pages 462 du T. VI et 314 du T. VII peuvent servir d'exemples.

Ainsi, dans le „boeckje" et dans les annotations aux leçons de van Schooten, deux ou trois écritures, eſſentiellement différentes par la forme des caractères, se suivent et parfois s'entremêlent dans la même pièce.

Au commencement cette circonſtance nous a donné des embarras. Plus tard, lorsque nous avions pu conſtater que toutes ces écritures étaient de la main de Huygens, elle a pu nous ſervir quelquefois à diſtinguer ſi une annotation ou remarque avait été ajoutée pendant, ou peu de temps après la compoſition du texte, ou bien ſi elle lui était poſtérieure de pluſieurs mois.

I.

[1645—1646].

APERÇU D'UN MANUSCRIT [1]) DE L'ÉCRITURE DE VAN SCHOOTEN [2]) QUI A SERVI À CHRISTIAAN HUYGENS POUR SES ÉTUDES.

§ 1. Les pages 1—23 contiennent des problèmes d'algèbre et de géométrie, dont la folution, qui n'y manque nulle part, dépend de la réfolution d'une équation du premier degré à une seule inconnue. Voici le premier de ces problèmes: „Invenire duos numeros, quorum fumma fit 8, et differentia 2." A la page 18 on trouve la queftion fuivante: „Sunt duae turres AB, CD quorum altitudo utriufque cognofcitur AB valere a vel 60 pedes, CD autem b vel 52 pedes. Quaeritur locus E, è quo fi ponantur fcalae pertingant ad fummitatem utriusque turris B et D. Cum diftantia earundem turrium AC fit c vel 64 pedes." La diftance AE du point cherché, au pied de la première tour, eft égalée à x et on trouve $x \infty \frac{bb + cc - aa}{2c}$; après quoi Huygens a ajouté: „sit $bb + cc - aa \infty qq$ [3]); $x \infty \frac{qq}{2c}$. Compofitio. Inveniatur linea Q cujus quadratum aequetur $\square$ AC + $\square$ DC.

---

[1]) C'est le N°. 12 du „Codex Hugeniorum" de la bibliothèque de l'université de Leiden. Sur le couvercle on lit en lettres majuscules: ALGEBRA. La première et la dernière partie, pp. 1—130 et pp. 282—348, de ce manuscrit sont de l'écriture de van Schooten, à l'exception de quelques rares annotations de la main de Christiaan Huygens. La partie intermédiaire, aux pp. 145—281, est au contraire presque entièrement de la main de Huygens et contient des travaux de 1650—1653 sur lesquels nous reviendrons.

[2]) Voir, sur Frans van Schooten, Jr., la note 2 de la pièce N°. 4 (p. 4 du T. I).

[3]) Huygens, pendant toute sa vie, a employé le signe ∞ pour indiquer l'égalité. Si, avec quelques autres altérations de la même portée, ce signe a été remplacé quelquefois dans les „Appendices" de la Correspondance par le signe =, c'était dans le seul but de faciliter la lecture au mathématicien moderne.

Demonſtratio. quoniam proport.les ſunt dupla AC," ſans achever ni la „Compoſitio" ni la „Demonſtratio."

C'eſt la ſeule annotation [4]) de ſa main que l'on trouve dans cette partie du manuſcrit, et encore eſt-elle, d'après l'écriture, d'une date bien poſtérieure à la compoſition du manuſcrit.

---

§ 2. Viennent enſuite, aux pages 24—58, les 37 premières queſtions du premier livre de l'ouvrage bien connu de Diophante [5]), accompagnées de ſolutions algébriques ſous une forme presque moderne. Les 22 premières mènent, comme celles des pages précédentes 1—23, à des équations du premier degré à une inconnue. [6]) Trois inconnues ſont introduites dans les ſolutions des queſtions 23 et 24. Enſuite dans les queſtions 25—28 le nombre des inconnues excède celui des équations, ce qui fait remarquer par van Schooten: „quaeſtionem non eſſe omnino determinatam, ſed infinitas habere ſolutiones, atque idcirco unam ex illis radicibus" [ce ſont les trois inconnues x, y, z] „ad libitum eſſe ſumendam, ut hic z," etc. Ajoutons que, à propos de la „Quaeſtio XXVI", Huygens a annoté „Diophantus habet 150, 92, 120, 114", ce qui en effet ne s'accorde pas avec la ſolution indéterminée donnée par van Schooten, lequel avait pris l'énoncé du problème dans un ſens qui n'était pas dans l'intention de Diophante.

Enfin, après la 29ième queſtion qui conduit à l'équation $25\, xx \infty 200\, x$, la „Quaeſtio XXX" donne lieu à l'équation quadratique complète $xx \infty 20\, x - 96$, dont les racines ſont calculées d'après l'algorithme ſuivant:

20
20
$400.\ aa$
$100.\ \frac{1}{4} aa$
$96.\ bb$
$4.\ \frac{1}{4} aa - bb$
$2.\ \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$
$10.\ \frac{1}{2} a$
$x \infty 12.\ \frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$
$x \infty 8.\ \frac{1}{2} a - \sqrt{\frac{1}{4} aa - bb}$

Ici les chiffres ſont de van Schooten; mais dans les lettres a et b on reconnaît la main de Chriſtiaan, qui les a ajoutées en guiſe d'explication (Comparez la pièce N°. II), ainſi que cela arrive encore à quelques autres endroits du manuſcrit, comme auſſi dans la 31ième queſtion.

Vient enſuite la „Quaeſtio XXXII" dont la ſolution, qui d'ailleurs ne préſente aucune difficulté, puiſqu'elle conduit facilement à une équation du premier degré, eſt écrite de la main de Huygens,

[4]) Il est vrai que des annotations comme celle-ci et comme plusieurs de celles qui vont suivre, n'ont pas beaucoup d'intérêt en elles-mêmes, mais il nous semblait utile d'entrer en quelques endroits un peu plus dans les détails du manuscrit de van Schooten, pour montrer plus clairement la portée de l'instruction donnée par lui à son jeune élève, et il est naturel de choisir pour cela de préférence les endroits où Huygens a ajouté des remarques et qui en conséquence, pour quelle raison que ce soit, ont attiré plus spécialement son attention.

[5]) Ouvrage cité dans la note 3 de la Lettre N°. 651 (p. 459 du T. II).

[6]) Il est difficile de croire que Huygens ait eu besoin de tant d'exemples pour apprendre à former

tandis que, au contraire, dans les questions 33—37, l'énoncé est de la main de Huygens et la solution de celle de van Schooten.

---

§ 3. Les pages 59—74 débutent par la solution de la question „Propositum quadratum dividere in duos quadratos," la huitième du Livre II de l'ouvrage mentionné de Diophante. Pour y parvenir, on pose xx et $\left(b - \frac{cx}{d}\right)^2$ pour les deux carrés dont la somme doit égaler bb, à propos de quoi Huygens remarque: „Idem aliter fieri poterat ponendo pro uno numero $bb - 2bx + xx$, pro altero $ccxx$ et repertum fuisset in fine aequationis $x \infty \frac{2b}{cc+1}$." Après, viennent les solutions des problèmes 10, 11, 12 et 13 du même livre II de Diophante, augmentées de celles des quatre suivantes: 1. „Duos numeros quadratos invenire, quorum summa sit numerus quadratus;" 2. „Duos numeros invenire quorum tam summa quam excessus sit numerus quadratus"; 3. „Datis duobus cubis, invenire duos alios cubos, quorum differentia aequet summam datorum; 4. „Datis duobis cubis invenire duos alios cubos, quorum differentia aequet differentiam datorum."[7]) Ensuite les pages 69—73, dont les deux premières ont été empruntées au Livre III des

---

et à résoudre une équation du premier degré à une inconnue. Mais peut-être le manuscrit devait-il, au moins à son début, servir encore à d'autres élèves.

[7]) Ajoutons que, à la page 145, on trouve encore un autre problème du même genre écrit entièrement, avec la solution, de la main de Huygens. Le voici:

„Invenire duos quadratos numeros quorum summae duplum sit quadratus."

$$\begin{array}{ll} \text{„Sit major} & \frac{1}{4}xx \\ \text{minor} & \frac{1}{4}xx - bx + bb \end{array} \Big\} \text{add.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{summa} & \frac{1}{2}xx - bx + bb \\ & 2 \end{array} \Big\} \text{m.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{duplum} & xx - 2bx + 2bb \infty xx - 2cx + cc \\ & 2bb - cc \infty -2cx + 2bx \\ & \frac{2bb - cc}{2b - 2c} \infty x. \end{array}$$

Determinatio.

b. major debet esse quam c."

Suivent encore deux applications numériques pour les cas $b = 4$, $c = 3$, et $b = 3$, $c = 2$. Remarquons d'ailleurs que la „determinatio" n'est pas correcte; témoin la solution $b = 6$, $c = 24$, conduisant aux carrés 49 et 1. Il est vrai toutefois que toutes les solutions peuvent être obtenues par la supposition $b > c$, comme on retrouve p. e. celle que nous venons d'indiquer, en posant $b = 6$, $c = 2x - 24 = 4$.

„Zeteticorum" de Viète [8]) (Zet. 7 et 8), traitent la construction d'un triangle à côtés et à aire rationaux; enfin la page 74 est de nouveau occupée par un problème menant à une équation ordinaire du premier degré.

---

§ 4. Les pages 75—102 contiennent, avec les règles pour la sommation, la multiplication, etc. des nombres irrationaux, celles pour trouver la racine quadratique ou cubique d'un binôme comme $7 + \sqrt{48}$ ou $10 + \sqrt{108}$ dans le cas où cette racine peut être réduite à la forme même d'un tel binôme [9]). Elles se terminent par quelques problèmes qui mènent à des expressions irrationnelles, comme par exemple celui de trouver le côté d'un octogone régulier quand le rayon du cercle circonscrit a été donné.

---

§ 5. Aux pages 103—130 qui constituent dans leur ensemble un petit traité sur les équations algébriques supérieures au second degré, on retrouve presque textuellement le Livre III de la Géométrie de Descartes à commencer par le paragraphe: „De la nature des Equations" et à finir par celui qui est intitulé: „Que tous les problesmes solides se peuuent reduire à ces deux constructions" (pp. 444—473 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery) [10]); seulement, van Schooten a ajouté à ce dernier paragraphe encore cinq nouveaux exemples, plus

---

[8]) Voir la page 58 de l'ouvrage cité dans la note 31 de la pièce N°. 5 (p. 10 du T. I).

[9]) On rencontre la même règle pour l'extraction de la racine cubique d'un binôme dans l'„Addimentum", ajouté par van Schooten à ses „In Geometram Renati Des Cartes Commentarii", p. 223 de l'édition de 1649 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 150, p. 218 du T. I.

[10]) Pour compléter ce qui regarde Huygens, nous avons à mentionner encore que dans toute la partie correspondante aux pages citées de la „Géométrie", on ne trouve dans le manuscrit qu'une seule annotation de la main de Huygens, et qu'elle se rapporte au passage qui traite de „L'invention de deux moyennes proportionelles", problème qui a beaucoup intéressé Huygens comme on le verra dans la suite. Voici cette annotation: „Demonstrandum est FL esse $\sqrt{C.\,aaq}$." (Voir la figure de Descartes, p. 469 de l'édition citée) „Sit FL ∞ e ductaque sit FH perpend. ad EC. $\frac{ee}{a} - \frac{1}{2}a$ CL sive HF. $\frac{1}{2}q - e$ EH. $\square$ HF $\frac{e^4}{aa} - ee + \frac{1}{4}aa$ add. $\square$ EH $\frac{1}{4}qq + ee - qe$. $\square$ EF $\frac{e^4}{aa} - qe + \frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$. $\square$ EC $\frac{1}{4}qq$ add. $\square$ CA $\frac{1}{4}aa$. $\square$ EA $\frac{1}{4}qq + \frac{1}{4}aa$.

$$\square\ \text{EF}\ \frac{e^4}{aa} - qe + \tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{4}aa \ \infty\ \tfrac{1}{4}qq + \tfrac{1}{4}aa\ \square\ \text{EA}$$

$e^3 \infty aaq$ sive $e \infty \sqrt{C.\,aaq}$ ut oportebat."

ſimples que ceux qui ſont traités par Deſcartes. Voici les deux premiers: „Datam rectam lineam AB ſecare in extremâ ac mediâ ratione duplicata, hoc eſt ut AB sit ad AC ut AC ad CD, et ita CD ad DB.”

„In triangulo rectangulo ABC, demiſſa ex angulo recto B perpendiculari BD in lat. oppoſitum AC, detur segmentum AD ∞ a, et area trianguli DBC ∞ bb. Invenire triangulum.

Partout dans ces exemples l'analyſe algébrique eſt ſuivie de la conſtruction au moyen de la parabole et du cercle. Dans le cinquième: „E ſerie quatuor continue proportionalium, datâ primâ majore a, et differentiâ ſecundae et quartae b, invenire ſecundam et tertiam,” la ſolution eſt de la main de Huygens. Elle eſt comme il ſuit:

„Sit secunda x et ſiat, ut prima (a) ad ſecundam (x) ita secunda (x) ad tertiam $\left(\frac{xx}{a}\right)$; ut ſecunda (x) ad tertiam $\left(\frac{xx}{a}\right)$ ita tertia $\left(\frac{xx}{a}\right)$ ad quartam $\left(\frac{x^3}{aa}\right)$.

Ergo $x - \frac{x^3}{aa} \infty b$.

$$aax - x^3 \infty aab.$$
$$x^3 \infty aax - aab.$$

aſſumpta a pro unitate ſiet. $x^3 \infty \underset{p}{ax} - \underset{q}{b}$.

„Determinatio: b non poteſt major dari quam $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}aa}$. [11]) alias enim a non poteſt eſſe major, quatuor proportionalium.”

De plus, à la dernière des pages 125—130, qui traitent la règle de Cardan, on trouve à côté des mots „Denique, ſi habeatur $x^3 \infty + px - q$,” etc. un ſigne de renvoi qui conduit à la note ſuivante de Huygens:

„Cum habetur $x^3 \infty px - q$ ad inveniendam radicem ſcribatur $y^3 \infty py + q$. Ex qua aequatione inventâ radice y per regulam Cardani, cognoscetur quoque x namque erit $x \infty \frac{1}{2}y \mp \sqrt{p - \frac{3}{4}yy}$.

„Cujus regulae ortus ut intelligatur ſciendum eſt, cum utrique aequationis parti $x^3 \infty px - q$, additur y^3 tum alteram quidem dividi poſſe per $x + y$, fierique $xx - xy + yy$; altera vero $px + y^3 - q$ per eandem $x + y$ divideretur ſi foret $py \infty y^3 - q$; eſſetque quotiens p. nam $px + py$ eſſet hoc caſu altera aequationis pars,

[11]) En réalité, les deux racines positives, situées pour $b < \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ entre b et a, deviennent imaginaires pour $b > \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}aa}$; donc la conclusion de Huygens est exacte; mais la raison qu'il en donne ne l'est pas, à la rigueur. D'ailleurs la solution du premier probléme de la pièce N°. VIII nous montrera de quelle manière Huygens a pu obtenir cette valeur limite $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}aa}$. Il semble donc probable que la „determinatio” a été ajoutée plus tard, c'est-à-dire après la composition de la pièce N°. VIII, et l'inspection du manuscrit ne fait que confirmer cette conjecture.

quam quidem fic dividi conftat per $x + y$. Adaequando igitur $py \infty y^3 - q$. fit $y^3 \infty py + q$ cujus aequationis radix y inveniri poteft per Cardani regulam. Et quum ex divifione utriufque partis aequationis fupradictae per $x + y$, oriatur $xx - xy + yy \infty p$. Erit $xx \infty xy - yy + p$. Et $x \infty \frac{1}{2} y \mp \sqrt{p - \frac{3}{4} yy}$."

„Et hac quodem ratione in Arithmeticis quaeftionibus radicem invenire licet, melius quam Geometrica defcriptione. nam per hanc quomodo inveftigabitur Radicem $x^3 \infty 7x - 6$ effe 2 vel 1, quod per jam explicatam methodum invenitur ponendo $y^3 \infty 7x + 6$ [12]). fitque $y \infty 3$." [13])

Enfin au pied de la même page 130 on lit de la main de Huygens: „Finis prioris partis fcriptorum Schotenij;" après quoi Huygens fait fuivre à la page 131: „De his vide appendicem cubicarum aequationum quam Fr. Schotenius adjunxit libello de Organica Conicorum Sectionum defcriptione." [14])

---

§ 6. Arrivé à la fin de la première partie du manufcrit de van Schooten, nous devons remarquer que dans la feconde partie, qui occupe les pages 282—348, plufieurs des pièces qui la conftituent doivent être lues dans l'ordre inverfe de la pagination [15]), c'eft-à-dire en commençant p. e. par la page de droite. Et cet ordre inverfe eft fans doute, en fubftance, l'ordre chronologique.

Nous commençons donc par les dernières pages 312—348 où l'on trouve les folutions de 25 problèmes divers, arithmétiques et géométriques, qui, à part quelques exceptions peu importantes, dépendent de la réfolution d'équations quadratiques. Dans tous les problèmes géométriques [16]) l'analyfe algébrique eft accompagnée de la conftruction qui en réfulte. Voici quelques-uns de ces problèmes:

2. [17]) „Rhombo dato ABCD, ductaque diagonali BD. Ex puncto A rectam

---

[12]) Lisez $7y + 6$.

[13]) Puisque le manuscrit donne la formule de Cardan pour les deux cas: $x^3 \infty px + q$ et $x^3 \infty px - q$, il n'est pas clair à quoi doit servir cette réduction, d'ailleurs assez ingénieuse, de l'un des cas à l'autre. Ajoutons que, d'après l'écriture, l'annotation doit être postérieure de quelques années a la composition du manuscrit.

[14]) Voir l'ouvrage cité dans la note 2 de la Lettre N°. 30, p. 65 du T. I, où surtout le cas irréductible est traité plus amplement et en utilisant l'„Invention nouvelle en l'algèbre" d'Albert Girard, ouvrage publié en 1629, Amsterdam, G. J. Blaeuw, et réimprimé par Dr. D. Bierens de Haan, Leiden, 1884, Muré frères.

[15]) Cette pagination, continuée par tout le manuscrit, a été ajoutée par nous.

[16]) On rencontre quelques-uns de ces problèmes, parfois légèrement modifiés, dans l'ouvrage de van Schooten de 1657, cité dans la note 3 de la Lettre N°s. 128, p. 184 du T. I. (Voir au premier Livre des „Exercitationes mathematicae" les N°s. 37, 41, 45 49, 50 des „Propositiones geometricae", qui correspondent aux N°. 22, 2, 12, 24 et 25 du manuscrit). Dans l'ouvrage imprimé les analyses algébriques ont d'ailleurs été supprimées.

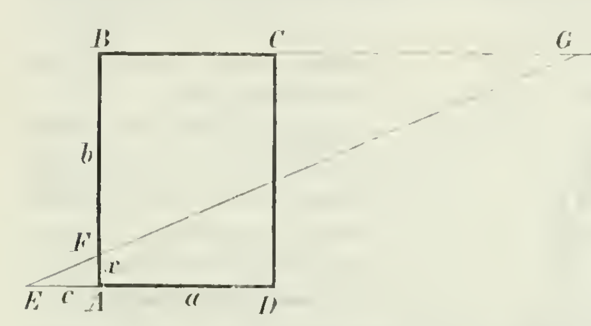
[17]) La numération est de nous.

lineam ducere AEFG, ita ut pars EF intercepta inter diag. BD et latus DC habeat ad totam rationam datam". G se trouve sur le côté BC prolongé.

12. „Datum trapezium" [ici un quadrilatère quelconque] „ABCD ita secare lineis EF, FG, GH et EH lateribus undique parallelis et ab iisdem aequali intervallo distantibusque; ita ut pars abcissa aequalis sit dato spatio."

13. „Data base trianguli AC, angulo verticis D, et aggregato laterum circa angulum verticis, invenire triangulum."

24. „Dato parallelogrammo ABCD et producto latere BC indefinite versus G, ex puncto E sumpto in AD producto rectam lineam ducere EFG, quae faciat triangulum FBG aequale parallelogrammo ABCD."



À ce dernier problème Huygens a annoté en tête: „Pappus Lib. 7. propos. 164". [18]) Plus bas, où van Schooten, après avoir obtenu la solution sous la forme AF ∞ x ∞ $b + \frac{ab}{c} \pm \sqrt{\frac{2abb}{c} + \frac{aabb}{cc}}$, ajoute la remarque „Maior radix in hac quaestione inutilis est", Huygens évidemment n'accepte pas cette assertion et la réfute par la figure que voici, tracée de sa main.



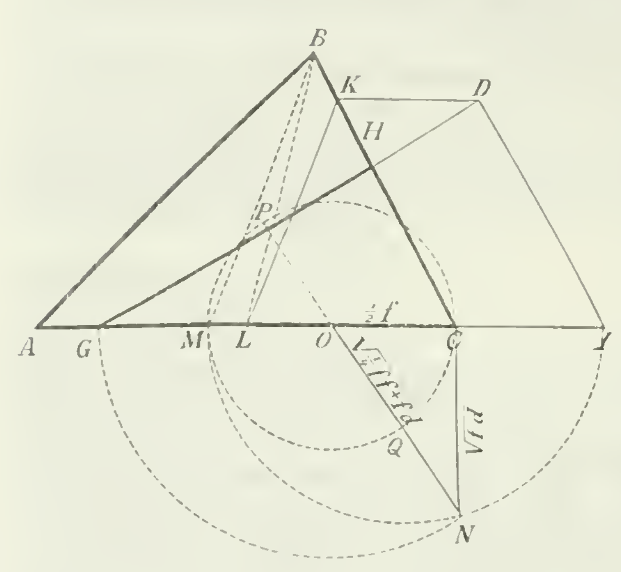
Enfin on trouve de la main de Huygens sur la page suivante l'annotation qui suit et qui constitue une analyse algébrique, fondée sur l'équation quadratique $c\,(b - x)^2 = 2abx$, à laquelle van Schooten a réduit le problème; analyse, qui aurait pu conduire facilement à une construction simple, que Huygens toutefois n'a pas pris la peine d'indiquer expressément:

„$2x$ —— c —— Q $b - x$ —— ab [19])
c —— $2x$ —— ab —— Q $b - x$
sit c —— a —— b —— p ergo ab ∞ pc
ergo c —— $2x$ —— pc —— Q $b - x$
sed c —— $2x$ —— cp —— $2px$

[18]) Voir, en effet, la page 263 de l'ouvrage cité dans la Lettre N°. 538, note 3 (p. 259 du T. II).
[19]) Lisez: $2x : c = (b - x)^2 : ab$.

$$\text{ergo } 2px \infty bb - 2bx + xx$$
$$2px + 2bx - xx \infty bb$$
$$p+b \text{ voc. } r \qquad 2rx - xx \infty bb$$
$$\text{ergo } 2r - x \text{ --- } b \text{ --- } b \text{ --- } x."$$

Cette annotation eſt datée au 20 aouſt 1653. Vient enſuite le problème 25, que voiçi, écrit comme les autres de la main de van Schooten: „Dato triangulo ABC, et extra ipſum puncto D. Ex D rectam lineam ducere, quae bifarium ſecet triangulum."



De ce problème van Schooten donne deux ſolutions différentes, dont nous reproduiſons la plus ſimple et la plus élégante puiſque Huygens y a ajouté, en décembre 1651, la „demonſtratio", que l'on trouvera à la fin.

„AB ∞ a, AC ∞ b, BC ∞ c, CI ∞ d, ID ∞ e, GC ∞ x. Ergo GI erit $x+d$.

Iam propter triangula ſimilia GHC, GDI, fiat ut GI $(x+d)$ ad ID (e) ita GC (x) ad CH $\left(\frac{ex}{x+d}\right)$.

Rectang. ſub AC, BC. bc, fit ergo $\frac{1}{2}bc \infty \frac{exx}{x+d}$ rectang. sub GC, CH.

$$\tfrac{1}{2}bcx + \tfrac{1}{2}bcd \infty exx$$
$$xx \infty \frac{bc}{2e}x + \frac{bc}{2e}d.$$

Reſoluatur fractio $\frac{bc}{2e}$ in proportionem, dicendo ut 2 ID $(2e)$ ad AC (b) ita BC (c) ad $\frac{bc}{2e}$, quod vocetur f, hoc eſt fiat ut 2 ID ad AC, ſive ut ſemiſſis huius ad ſemiſſem illius id eſt ut ID vel CK ad $\frac{1}{2}$ AC vel CL, ita BC ad quartam CM ∞ f.

$$xx \infty fx + fd; \quad x \infty \tfrac{1}{2}f + \sqrt{\tfrac{1}{4}ff + fd}.$$

Demonſtratio. die ult.á 1651. Semidiametro OM vel OC deſcribatur circulus PMQC, et producatur NO ad circumf. Eſt igitur ▭ PNQ hoc eſt ▭ CGM aequale qu. CN tangentis, hoc eſt ▭° MCI; ergo erit GM ad MC ut CI ad

CG, per 16. 6. [20]) et componendo GC ad MC ut GI ad GC, hoc est ut DI vel KC ad HC. ergo □ ſub GC, HC aequale □° ſub MC, KC. ſed hoc aequale eſt □ BC, LC, quoniam ex conſtr. eſt BC ad MC ut KC ad LC. ergo quoque □ sub GC, HC aeq. □ ſub BC, LC, quare per 15.6 erit et triang. GCH aequ. triang°. BCL ſive dimidio triangulo ABC; quod erat dem."

Ajoutons que la dernière page 349 contient une table des „Numeri Graecorum", écrite par Huygens, dont voici les dernières lignes:

10000 ͵ῑ vel ut Diophantus ᾱ. ſecundi ordis.
100000 ͵ρ̄ ῑ.
1000000 ͵͵ᾱ ρ̄
etc. etc.
518463 ͵φ ͵ι ͵η υ ξ γ vel ut dioph. ν ᾱ. ͵η υ ξ γ.
$\frac{9}{16}$. ς̄. ιϛ. $\frac{96}{900}$. ϟ ξ. π.

---

§ 7. Aux pp. 306—311 on rencontre ſix problèmes, qui mènent à des lieux géométriques. En voici le premier: A datis duobus punctis A et B, inflectere duas rectas lineas AC, CB ita ut quae ab iis ſiunt quadrata [21]) habeant ad triangulum ACB datam rationem. Ratio data ſit ut DE quater ſumpta ad DB."

Poſant AD ∞ DB ∞ a, DE ∞ b, DF ∞ x, CF ∞ y, la relation $yy \infty 2by - aa - xx$ eſt obtenue, à quoi Huygens fait ſuivre: „et $y \infty b +$ vel $- \sqrt{bb - aa - xx}$." Vient enſuite la „Conſtructio", c'eſt-à-dire la deſcription du cercle, lieu du point C, ayant E pour centre et dont le rayon égale $\sqrt{bb - aa}$. Ici Huygens ajoute: „poſito enim pro x DF ad lubitum, erit etiam EH ∞ x; quare H [22]) erit $\sqrt{bb - aa - xx}$, et tota CF ∞ $b + \sqrt{bb - aa - xx}$, vel KF ∞ $b - - \sqrt{bb - aa - xx}$. Haec autem determinatio eſt, quod b debet major dari quam a."

En tête du ſecond, du cinquième et du ſixième des problèmes mentionnés Huygens a écrit: „Ex Pappo". On les retrouve en effet dans le ſeptième Livre de l'ouvrage de Pappus mentionné dans la note 18, là où Pappus, aux pages 162 et 163, donne l'aperçu bien connu des „lieux plans" d'Apollonius. [23]) De plus, à propos

---

[20]) C'est-à-dire la 16e proposition du Livre 6 des „Elementa Geometrica" d'Euclide.

[21]) C'est-à-dire: la somme de ces carrés.

[22]) Lisez: CH.

[23]) On y retrouve également le premier, le troisième et le quatrième problème. Ainsi tous les six problèmes qui devaient servir ici comme introduction à la méthode de la géométrie analytique que Descartes venait de créer, ont été empruntés à l'aperçu mentionné. Comme on

du cinquième problème: „A datis duobus punctis A et B inflectere rectas duas lineas AD, DB in ratione data AC ad CB", Huygens remarque: „Si oporteat quadrata linearum AD, DB esse in data ratione, rursus locus puncti D erit circumferentia circuli, nam ubicunque sumatur in eâ punctum D, habebunt quadrata AD, DB inter se eandem rationem, nimirum duplicatam rationis datae AC ad CB" [24]).

---

§ 8. Les pp. 300—305 contiennent la discussion, élucidée par des exemples, des cas où les questions géométriques amènent des équations algébriques soit identiques, soit fausses, soit insuffisantes en nombre. On y trouve, pp. 300—301, avec la suscription „Locus ad superficiem", deux problèmes qui ont dû servir sans doute à expliquer le passage de la „Géométrie" de Descartes, où on lit, (p. 407 du Tome VI de l'édition d'Adam et Tannery): „Et s'il manque deux conditions à la détermination de ce point, le lieu où il se trouve est une superficie, laquelle peut estre tout de mesme ou plate ou spherique ou plus composée."

Le premier de ces problèmes: „Dato triangulo aequilatero ABC in eoque ducta perpendiculari BD: oportet invenire punctum E intra triangulum, à quo si ducantur tres perpendiculares EF, EG et EH in singula latera, ut summa ipsarum aequetur perpendiculari BD." a été reproduit par van Schooten dans ses Commentaires sur la „Geometria" (voir la note 9) p. 201 de l'édition de 1649; l'autre: „Dato circulo circa A centrum, invenire punctum B extra centrum, per quod si ducantur duae rectae lineae CD, EF normaliter invicem secantes in B, quadrata segmentorum CB, BD, EB et BF simul sumpta quadrato diametri sint aequalia," lequel, de même, conduit à une équation identique, y a été remplacé par un exemple imaginé par le jeune Huygens. On le trouvera au § 3 de la pièce N°. III.

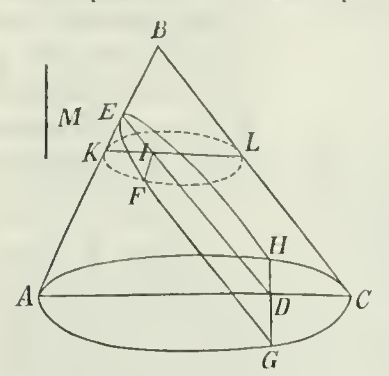
---

§ 9. Les pages 296—299 se retrouvent, sous une forme plus achevée et un peu modifiée, aux pages 207—212 de l'édition *seconde* (de 1659) de la „Geometria" par van Schooten, sous le titre: „De locis solidis sive conicarum sectionum proprietatibus." On y trouve la déduction des équations de la parabole, de l'hyperbole et de l'ellipse (et encore dans le manuscrit celle du cercle anti-parallèle), considérées comme sections du cône scalène à base circulaire.

le sait, van Schooten a tâché de restituer ces „lieux plans" d'Apollonius au Livre III de l'ouvrage cité dans la note 16. On y rencontre les problèmes en question aux pages 286 (XV problema), 273 (X probl.), 231 (V probl.), 224 (II probl.), et 290 (XVII probl.), où ils sont traités d'ailleurs d'après la méthode des anciens.

[24] Cette remarque semble bien superflue. Elle s'explique probablement par le fait que Pappus aussi a traité les deux problèmes, ceux du rapport constant de AD à DB et de AD^2 à DB^2, comme des problèmes distincts, parce qu'il les a formulés en deux endroits différents de l'aperçu mentionné.

Dans le cas de la parabole van Schooten, après avoir obtenu l'équation ſous la forme: *My* ∞ *xx*, ajoute: „Quod demonſtrat, ſi fiat ut rectangulum ſub AB, BC ad quad. AC ita EB ad quartam M, quae latus rectum vocetur. Porro manifeſtum hinc eſt, lineam M multiplicatam per EI facere ſemper productum aequale quadrato ordinatae FI. Quae est 11 prop. 1 libri Apollonii Conicorum." [25])



A propos de quoi Huygens ajoute à la date du 1 Sept. 1653. „Demonstratio. Ratio BE ad M eſt eadem quae rectanguli AB, BC ad quad. AC hoc eſt, eadem compoſitae ex ratione BC ad CA, et BA ad CA. Est autem ut BC ad CA ita EI ad IK, et ut BA ad CA ita BE ad IL; ergo ratio BE ad M componitur ex ratione EI ad IK, et BE ad IL sed ratio BE ad M itidem componitur ex ratione BE ad IL et IL ad M, ergo ratio compoſita ex ratione EI ad IK et BE ad IL eadem est compoſitae ex BE ad IL et IL ad M. quare ſublata communi proportione quae est BE ad IL, erit eadem ratio EI ad IK quae IL ad M. ideoque rectangulum sub IK, IL h. e. quadratum IF aequale ▭° EI, M."

---

§ 10. Les pages 288—295 contiennent, ſous le titre „De inveniendis tangentibus linearum curvarum modo Domni Descartes", l'application de la méthode, expoſée par Deſcartes au second livre de ſa „Géométrie" (voir les pp. 413—424 du T. VI de l'édition d'Adam et Tannery), à la parabole, l'ellipſe, l'hyperbole, la conchoïde et à l'ovale de Deſcartes. Les applications à l'ellipſe et à l'ovale de Deſcartes se retrouvent dans la „Géométrie" au lieu cité; celles à la parabole, l'hyperbole et la conchoïde dans les Commentaires de van Schooten, pp. 216—222 de l'édition de 1649 de la „Geometria". Dans le manuſcrit, l'application à l'hyperbole eſt de l'écriture de Huygens, mais elle correſpond exactement à celle à l'ellipse, qui eſt de la main de van Schooten et qui elle-même ne diffère pas ſenſiblement de celle qu'on trouve dans la „Géométrie" de Deſcartes [26]). Pour cette raiſon nous croyons pouvoir la passer.

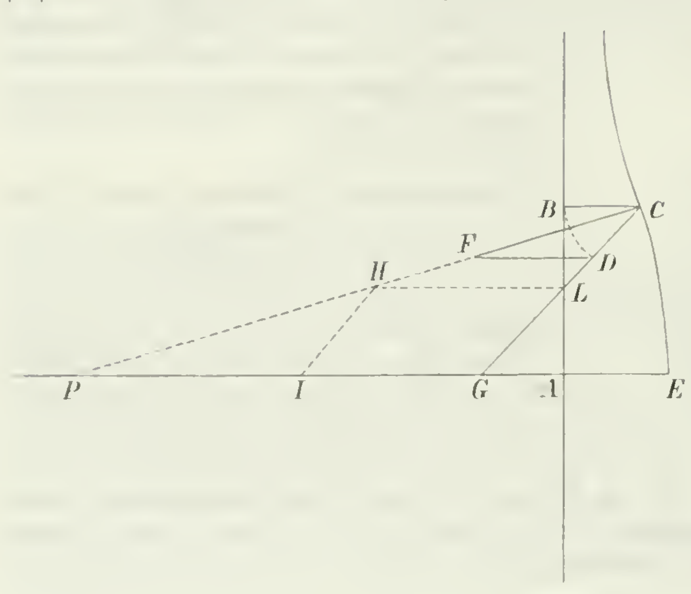
Une autre annotation de Huygens ſe rapporte à la conſtruction, donnée par

---

[25]) L'ouvrage cité dans la note 4 de la pièce N°. 5 (p. 6 du T. I).

[26]) Seulement van Schooten y a ajouté la déduction, au moyen d'un théorème d'Apollonius, cité par Descartes, de l'équation $xx \infty ry - \frac{r}{q}yy$ de l'ellipse. On la retrouve pp. 213—214 des Commentaires, éd. 1649.

Descartes sans démonstration, de la normale à la conchoïde[27]) (voir les p. 423—424 de l'éd. citée de la „Géométrie").



Par l'analyse, qui a été reproduite dans les „Commentarii" p. 219—222 de l'édition de 1649, van Schooten arrive à la formule $b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3} \infty v$, où $v = AP$; $b = GA$; $c = LC$; $y = BC$. Il s'agit donc de démontrer que, par la construction qui suit et qui est celle de Descartes, on a en effet $AP = b + \frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$.

„Constructio." [28])

„Sumatur CD aequalis CB, ducaturque DF parallela cum AP et aequalis ipsi GL, ducaturque FC, hanc dico secare conchoidem in C ad angulos rectos."

Demonstratio. Propter triangula similia si fiat ut BC ∞ y ad AG ∞ b, ita LC ∞ c ad LG $\infty \frac{bc}{y}$, eaque nominetur g, et erit $\frac{gc}{y}$ idem ac $\frac{bcc}{yy}$. ad resolutionem autem hujus fractionis, fiat ut y vel CD ad g vel DF, ita c vel CL ad $\frac{gc}{y}$ vel $\frac{bcc}{yy}$, lineam LH sive GI eaque nominetur h: eritque $\frac{bbcc}{yyy}$ idem ac $\frac{hb}{y}$, ad resolutionem autem hujus fractionis, fiat ut y vel BC ad b vel AG sive (quod idem est propter triangula similia BCL et AGL) ut CL ad LG vel ipsi aequalem HI, ita h vel LH ad $\frac{bh}{y}$ vel $\frac{bbcc}{yyy}$ lineam IP, propter $\triangle$ la similia CLH et HIP."

„Sumatur igitur CD aequalis ipsi CB, ductaque DF aequali GL et parallela

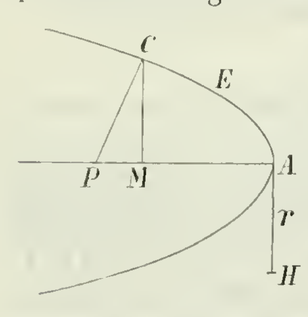
[27]) Nous aurons à revenir sur cette construction à propos de la simplification que Huygens y a apportée plus tard; simplification qui se fonde sur la remarque que la droite qui joindrait les points H et G de la figure serait perpendiculaire sur GC. On la trouve mentionnée dans l'édition de 1659 de la „Geometria" par van Schooten, à la page 253.

[28]) La „Constructio" et la „Demonstratio" qui suivent, sont de la main de Huygens. On retrouve la „Demonstratio" sous une autre rédaction dans l'ouvrage cité dans la note précédente, aux pages 252 et 253; comme aussi aux pages 222 et 223 de l'édition de 1649.

cum AP, tum FC quaeſitâ et conſtat ſieri PI $\infty \frac{bbcc}{y^3}$ GI $\infty \frac{bcc}{yy}$ et AG ∞ b, et AP vel $v \infty$ [29]) $\frac{bcc}{yy} + \frac{bbcc}{y^3}$ quod erat demonſtrandum."

---

§ 11. Aux pages 284—287, ſous le titre: „De Maximis et Minimis ſive Ratio inveniendi caſum determinationis in Problemate determinato juxta Methodum Domni de Fermat," la méthode de Fermat, publiée en 1644, dans le ſixième volume de l'ouvrage de Hérigone cité dans la note 4 de la lettre N°. 139 (p. 203 du T. I), eſt appliquée à quatre problèmes, dont deux: „Invenire maximum rectangulum contentum ſub duobus ſegmentis datae rectae lineae"; „Invenire maximum rectangulum contentum ſub media et differentia extremarum trium proportionalium" ſe retrouvent chez Hérigone, p. 59 et p. 60 de l'ouvrage cité. Voici les autres: „Datis poſitione duabus rectis lineis annuentibus AB, CB et puncto D intra angulum ab iis comprehenſum. Oportet per D rectam lineam ducere ADC, quae faciat triangulum ACB minimum omnium ſic factorum"; „Data parabola CE et puncto in eius axe P. Oportet ex P rectam lineam ducere PC quae ſit minima omnium quae ex puncto P ad parabolam duci poſſunt." Pour réſoudre ce dernier problème, van Schooten, après avoir poſé AH (latus rectum) ∞ r, AP ∞ a, AM ∞ x, trouve facilement □ PC ∞ $aa - 2ax + rx + xx$. Puis il refait le même calcul pour la valeur AM $\infty x + y$, trouvant □ PC ∞ $aa - 2ax + rx + xx - 2ay + ry + 2xy + yy$. Égalant ces deux valeurs de □ PC et diviſant par y, il obtient l'équation $-2a + r + 2x + y \infty 0$, et, enfin, poſant $y \infty 0$, la ſolution donne $x \infty a - \frac{1}{2} r$ [30]), après quoi Huygens a ajouté plus tard: „Ad hunc modum in Conchoide quoque et reliquis lineis curvis tangentes ad data puncta duci poſſunt. nam ſi datâ AP invenire poſſum AM et MC, etiam harum unâ datâ noſcitur AP, ex eadem aequatione."



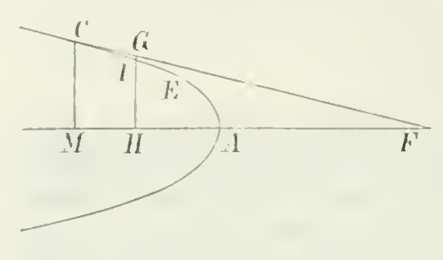
---

§ 12. Enfin les pages 282 et 283 contiennent, ſous le titre: „De Inveniendis

[29]) Intercalez: „b +"

[30]) C'est la méthode même de Fermat publiée par Hérigone, seulement l'e de Hérigone est remplacé par y. Comparez la pièce N°. VIII de Huygens où la même notation se retrouve. L'explication manque ici comme chez Hérigone. Huygens y a pourvu plus tard dans l'ouvrage „Demonstratio regulae de maximis et minimis", cité dans la note 1 de la Lettre N°. 2435 (p. 95 du T. IX).

tangentibus Linearum curvarum secundum methodum Domni Fermat," l'application de cette méthode à la parabole et à l'ellipse, tout comme chez Hérigone, p.65—68 de l'ouvrage cité dans le paragraphe précédent; mais avec d'autres notations. Voici, pour faire comprendre l'annotation de Huygens qui va suivre, la solution pour la parabole telle qu'on la trouve dans le manuscrit: „Data parabola CE in dato puncto C invenire tangentem parabolam."



„Sit illa tangens CF. Et esto MA ∞ a, MF ∞ x. Per 20 prop. lib. 1mi Conicorum Apollonii. Quadratum CM ad quadratum IH eam habet rationem quam MA ad HA. Habet autem quad. CM ad quad. IH majorem rationem quam ad quad. GH per 8. 5. [31]) Ut autem □ CM ad □ GH ita est □ FM ad □ HF. Itaque habebit MA ad HA maiorem proportionem quam □ MF ad □ HF."

„Esto igitur MH ∞ y ∞ o. Eritque AH ∞ $a-y$; HF ∞ $x-y$

MA (a) —— HA ($a-y$) —— □ MF (xx) —— □ HF ($xx-2xy+yy$)

$$axx - yxx \infty axx - 2axy + ayy$$
$$2axy - xxy \infty ayy$$
$$2ax - xx \infty ay\ \beta$$ [32])
$$2ax \infty xx$$
$$2a \infty x."$$

A quoi Huygens a fait suivre plus tard mais à une date inconnue: „Schotenius inventionem hujus regulae non percepit, quae est hujusmodi. [33]) Recta CF supponenda est secare parabolam in G, indeque ductam perpendicularem GH. datis jam MA ∞ a, et MH ∞ y, oportet invenire quanta sit MF ∞ x. Invenitur $xx \infty 2ax - ay$. β, quadrata aequatio quum MH ∞ y certam lineam denotat. verum si MH non sit major nihilo, impune deletur — ay sitque $xx \infty 2ax$ et $x \infty 2a$."

[31]) C'est-à-dire la Prop. 8 du Livre 5 des „Elementa" d'Euclide.

[32]) C'est un signe de renvoi ajouté par Huygens. On le retrouve dans l'annotation qui va suivre.

[33]) Huygens a expliqué cette règle plus amplement dans l'ouvrage „Regula ad inveniendas Tangentes curvarum", cité dans la note 1 de la Lettre N°. 2435 (p. 95 du T. IX).

II.

[1645].

Regulae pro Aequationibus quadratis.

Primus Caſus. $xx \infty$ [1] $ax + bb$ —— Erit $x \infty \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$
Secundus Caſus. $xx \infty - ax + bb$ —— Erit $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb} - \frac{1}{2}a$
Tertius Caſus. $xx \infty \ ax - bb$ —— Erit $x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} + \frac{1}{2}a$
vel $\frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$

Unde autem inventae ſint hae Regulae, ex geometria Carteſii patet; [2] ſed et alio modo inveniri poſſunt: Sit enim $xx \infty ax + bb$, et erit $xx - ax \infty bb$; adjungatur utrinque $\frac{1}{4}aa$ et fiet $xx - ax + \frac{1}{4}aa \infty bb + \frac{1}{4}aa$, et quia $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ eſt quadratum erit ipſius radix $x - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$, et $x \infty \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa} + \frac{1}{2}a$, quae eſt prima regula.

Secunda $xx \infty - ax + bb$
$$xx + ax \infty bb$$
$$xx + ax + \frac{1}{4}aa \infty bb + \frac{1}{4}aa$$
$$x + \frac{1}{2}a \infty \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$$
$$x \infty \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa} - \frac{1}{2}a$$

Tertia $xx \infty ax - bb$
$$xx - ax \infty - bb$$
$$xx - ax + \frac{1}{4}aa \infty \frac{1}{4}aa - bb$$
$$x - \frac{1}{2}a \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} \text{ vel } x - \frac{1}{2}a \infty - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$
$$x \infty \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb} + \frac{1}{2}a \text{ vel } x \infty \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$$

---

[1] Voir la note 3 de la pièce N°. I.

[2] Voir le Livre Premier de la Géométrie (T. VI. p. 374—376 de l'édition récente des Œuvres de Descartes par Adam et Tannery), où l'on rencontre des résolutions géométriques des cas divers de l'équation quadratique.

Notandem autem eſt in tertio caſu habere poſſe x duos diverſos valores in caeteris autem non, in tertio enim caſu ubi $xx - ax + \frac{1}{4}aa$ eſt aequalis $\frac{1}{4}aa - bb$, quia radix $\frac{1}{4}aa - bb$ poteſt quoque eſſe $- \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, (quia — per — facit +); fiet $x - \frac{1}{2}a \propto - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$ et poſtremo $x \propto \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}aa - bb}$, ut erat dictum in regula. Sed hoc in caeteris non poteſt obtinere locum, quia in ſecundo caſu $x + \frac{1}{2}a$ non poteſt eſſe aequale minus nihilo [3]) hoc eſt $- \sqrt{\frac{1}{4}aa + bb}$: in primo autem $x - \frac{1}{2}a$ non poteſt eſſe aequale $- \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$, quia poſtea x non poteſt aequari $\frac{1}{2}a - \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$ quia jam unus $\sqrt{\frac{1}{4}aa}$ aequalis eſt $\frac{1}{2}a$, et ideo $\frac{1}{2}a - \sqrt{bb + \frac{1}{4}aa}$ minus nihilo.

---

[3]) L'absence de toute allusion à l'existence des racines „fausses" ou négatives, nous fait présumer que cette pièce a été composée avant l'arrivée de Huygens à Leiden, ou, du moins, hors de l'influence de van Schooten, qui n'aurait pas manqué de lui signaler ces racines comme il l'a fait dans son Commentaire sur ce même endroit de la Géométrie (p. 176 de l'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 150, p. 218 du T. I).

Ajoutons que la méthode suivie ici, aujourd'hui si usuelle, n'était nullement inconnue alors (voir p. e. l'„Invention nouvelle en l'Algèbre" par Girard de 1629 au Chapitre: Des Equations ordonnées) et remarquons que l'étude de la „Géométrie" de Descartes avait été recommandée au jeune Huygens par Stampioen de Jonge, son premier précepteur de mathématiques. (Voir la pièce N°. 5 à la page 10 du T. I).

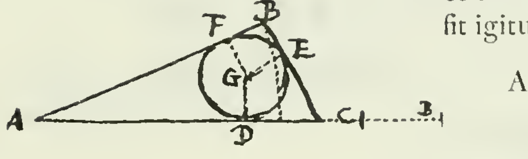
III. [1]

[1645].

1. [2])

In dato △^lo circulum inscribere.

Sit AB ∞ a; BC ∞ b; AC ∞ c; DC ∞ x. Quoniam igitur EC aequalis est DC erit BE ∞ $b-x$ et ob e. r.m [3]) AF ∞ $a - b + x$ cui aequalis ob e. r.m est AD. fit igitur aequatio talis



$$\text{AD} + \text{DC}.\ a - b + 2x \infty c.\ \text{AC}$$
$$2x \infty c + b - a$$
$$x \infty \frac{c + b - a}{2}$$

Sumatur ergo EC aequalis DC et interfectio perpendicularium EG, DG, erit centrum Circuli in triangulo.

---

[1]) Cette pièce contient la solution de huit problèmes de planimétrie. Il est difficile de décider si elle a été composée sous l'influence du premier précepteur Stampioen de Jonge ou bien sous celle de van Schooten. Plusieurs problèmes ont beaucoup de ressemblance avec ceux qu'on rencontre dans les „cent questions géométriques avec leurs solutions" par Sybrandt Hansz. de Harlingen, maître arithméticien à Amsterdam, ouvrage recommandé par Stampioen de Jonge dans la pièce N°. 5 (p. 5 du T. I) à l'étude de Huygens avec l'injonction d'en résoudre les problèmes tant arithmétiquement, par le calcul, que géométriquement, par la règle et le compas. Par contre il semble bien probable que le troisième problème a été composé par Huygens à propos des remarques et exemples de van Schooten, qu'on trouve aux pages 300 et 301 du manuscrit dont l'aperçu constitue notre pièce N°. I (voir le § 8 de cette pièce). Quoique, naturellement, l'idée d'élucider par un exemple le passage en question de la „Géométrie" de Descartes ait pu venir indépendamment à Huygens comme à van Schooten.

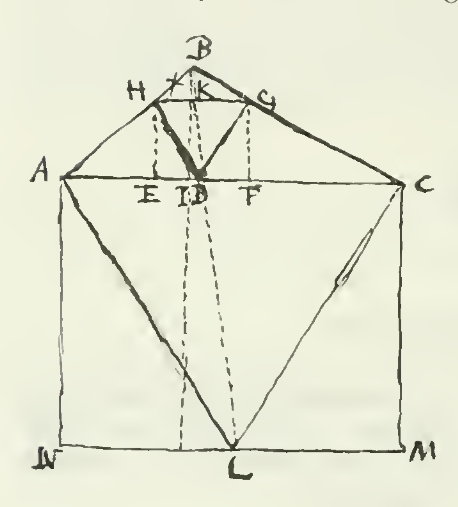
[2]) Jusqu'au numéro 6 inclus, la numération est de Huygens.

[3]) Egalitatem radiorum?

2.

In dato triangulo inscribere triangulum aequilaterum ut unum latus parallelum ſit uni lateri trianguli dati. [4])

Inſcribatur prius lateri AC triang. aequilat. ALC et circum illum □ ANMC, ſi igitur inſcripſero dato triangulo rectangulum ſimile huic, facile ei inſcribam et triangulum aequilaterum. Sit ergo AC ∞ a; AB ∞ b, DB [5]) ∞ c; BH ∞ x, AN ∞ d. Et fiat ut b ad a, ita x ad $\frac{xa}{b}$. Vel HG. Et rurſus Ut b ad c ita $b - x$ ad $\frac{cb - cx}{b}$ ſive HE.



Igitur propter rectangula ſimilia HF et AM erit

$$m. \left| \begin{array}{ll} \frac{cb - cx}{b}\ \text{HE} & \text{HG}\ \frac{xa}{b} \\ a\ \text{AC} & \text{AN}\ d \end{array} \right.$$

$$\frac{cba - acx}{b} \infty \frac{dxa}{b}$$

$$cb \infty ax + cx$$

$$\frac{cb}{d + c} \infty x.$$

Conſtr. Deſcribatur ſuper AC triang. aequilaterum. ducaturque linea BL et à puncto D ubi AC ſecat ducatur DH parall. LA, et DH erit latus quaeſiti trianguli.

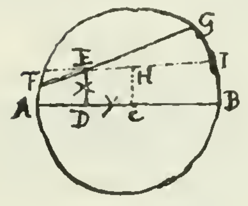
---

[4]) Au 89ième problème, Sybrandt Hansz., dans l'ouvrage cité dans la note 2 de la pièce N°. 5 (p. 5 du Tome I), apprend à inscrire un carré dans un triangle donné; et cette même question se trouve résolue algébriquement à la page 12 du manuscrit de van Schooten. (Voir la pièce N°. I du volume présent). La construction, à laquelle Sybrandt Hansz. arrive, est moins simple et moins élégante que celle de Huygens, qui va suivre, du problème analogue; quoique cette dernière se laisse déduire sans difficulté de la formule algébrique qui la précède, il semble plus probable qu'elle ait été obtenue directement au moyen de considérations géométriques faciles à deviner, mais que Huygens ne donne pas.

[5]) Lisez IB, c'est-à-dire la hauteur du triangle.

3.

Invenire punctum in dato circulo, per quod si linea agatur remanens intra circulum, et perpendicularis ex eodem demittatur in diametrum; rectangulum sub segmentis basis, quae perpendicularis efficit, aequale sit quadrato perpend^s. dictae una cum rectangulo sub segmentis quae eadem perpend. facit, in linea ducta per quaesitum punctum [6]).



Sit AC ∞ a; ED ∞ x; DC ∞ y. Eritque FH vel HI ∞ $\sqrt{aa - xx}$ et EI ∞ $\sqrt{aa - xx} + y$ et FE $\sqrt{aa - xx} - y$, ergo rectangulum FEI fiet si multiplicavero

$$\begin{array}{ll} & \sqrt{aa - xx} + y \\ \text{per} & \sqrt{aa - xx} - y \\ \square\ \text{FEI} & \left.\begin{array}{r} aa - xx - yy \\ \square\ \text{DE}\ xx \end{array}\right\} \text{add.} \end{array}$$

$$\square\ \text{FEI} + \square\ \text{DE}\ aa - yy \infty aa - yy \square\ \text{ADB}.$$

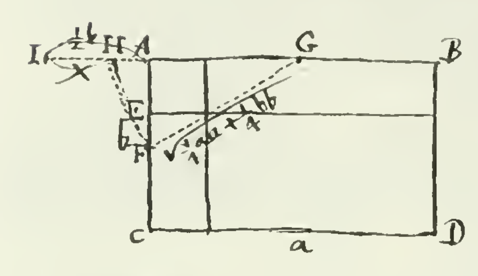
Hoc punctum ubicunque in circulo sumi potest, quia neutrius valor invenitur: ideoque theorema est.

---

[6]) C'est ce problème et sa solution, reproduits par van Schooten dans la première édition de 1649 de ses „Commentarii in Geometriam Renati Des Cartes", ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 150, p. 218 du T. I, qui constituent la première œuvre imprimée de Huygens. Tandis que dans la seconde édition, parue en 1659, de l'ouvrage de van Schooten, Christiaan Huygens est mentionné plusieurs fois, on ne rencontre son nom dans la première édition qu'à un seul endroit (pp. 203—205) qui débute comme il suit: „Alterum exemplum, quod hic afferendum duxi," [voir pour le premier exemple et pour le passage de la „Géométrie" qu'il s'agit d'élucider le § 8 de la pièce N°. I] „desumpsi ex inventis Nobilissimi & praeclari Juvenis D. Christiani Hugenii, quibus sibi jam pridem apud Doctos tantam paravit laudem atque admirationem, ut non nisi magna quaeque ab eo expectanda esse affirmare non veriti fuerint." Suit alors, sous une rédaction un peu modifiée, le problème de notre texte et sa solution, après quoi van Schooten ajoute: „Quia igitur hìc utrinque eædem reperiuntur quantitates, & adimpletis omnibus conditionibus nulla ampliùs inveniri potest æquatio, quâ innotescat utraque incognita quantitas x & y: liquet eas ad libitum sumi posse, atque Problema propositum esse Theorema. Defectus itaque duarum in hâc quaestione conditionum ad determinandum punctum E, ostendit, illud ubique extra diametrum, intra circulum cadere posse, & locum ejus esse ad superficiem Circuli. Id quoque facilè demonstrari potest." etc.

4.

A dato rectangulo abscindere gnomonem aequali ubique latitudine, qui dimidium contineat ipsius rectanguli. [7])



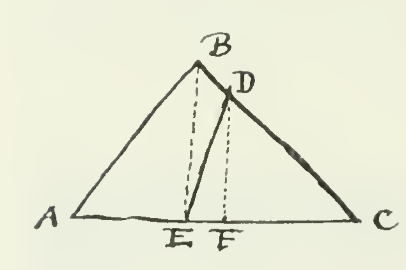
Sit AB $\infty\ a$; AC $\infty\ b$; AE $\infty\ x$. Erit ergo gnomon bis sumptus aequalis rectangulo AD vel

$$2ax + 2bx - 2xx \infty ab$$
$$ax + bx - \tfrac{1}{2}ab \infty xx$$
$$\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b - \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{4}bb} \infty x$$

IG est $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, FG vel GH est $\sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$. Ergo IH est $\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \sqrt{\frac{1}{4}aa + \frac{1}{4}bb}$, sive x.

5.

Datum triangulum, ex puncto in latere dato, bifariam secare [8])



Sit BC $\infty\ a$; DC $\infty\ b$; AC $\infty\ c$; EC $\infty\ x$. Quoniam igitur $\triangle$ EDC debet dimidium esse triangi ABC erit

$$\text{mul.}\ \begin{cases} \text{DC } b & \text{BC } a \\ 2\ \text{EC } 2x & \text{AC } c \end{cases}$$
$$2xb \infty ac$$
$$x \infty \frac{ac}{2b}$$

Ergo b ad a, ut $\frac{1}{2}c$ ad x. [9])

[7]) Au 48e problème Sybrandt Hansz. demande que le gnomon en question ait une aire donnée. Sous cette forme plus générale le problème a été repris par Huygens le 31 déc. 1651, à la page 177 du manuscrit mentionné dans la note 1 de la pièce N°. I. Comme cette solution ne présente rien de remarquable nous ne la reproduirons pas.

[8]) Le 77e problème de Sybrandt Hansz demande de partager le triangle, sous les mêmes conditions, en trois parties égales. De plus le problème est un cas particulier du 8e, que l'on retrouve dans le 92e problème de Sybrandt Hansz.

[9]) Voir la figure où FC $= \frac{1}{2}$ AC, CE $= x$.

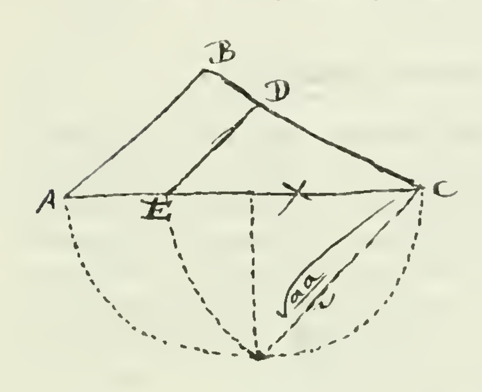
6.

Si ABC ſit triangulum iſoſceles et a vertice B ducatur utcunque BD uſque in baſin dico rectangulum ſub AD, DC, una cum quadrato DB aequale eſſe AB quadrato et ideo etiam quomodocunque BD ducatur ſemper rectangula ex baſis ſectionibus, una cum quadrato lineae ductae a vertice ſibi invicem aequalia eſſe.

Conſequuntur hic ex 3° probl. [10])

7.

Datum triangulum biſariam ſecare linea parallela alicui laterum.



Sit BC ∞ a, AC ∞ b [11]); EC ∞ x.

$$a \text{——} b \text{——} x \,/\, \frac{bx}{a} \;{}^{12)}$$

$$2x$$

$$ab \infty \frac{2bxx}{a}$$

$$aa \infty 2xx$$

$$\frac{aa}{2} \infty xx$$

$$\sqrt{\frac{aa}{2}} \infty x.$$

8.

Datum triangulum per punctum intra ipſum datum biſariam ſecare. [13])

---

[10]) Il suffit, en effet, pour le voir, d'identifier les points A, B, C, D de la figure du texte avec les points F, C, I, E de celle du troisième problème. Alors ▭ ADC = ▭ FEI = $aa - xx - yy$, □ BD = □ CE = $xx + yy$.

[11]) Lisez BC ∞ b, AC ∞ a.

[12]) En notation moderne $a : b = x : \frac{bx}{a}$.

[13]) C'est le 92e problème de Sybrandt Hansz. Au lieu d'une solution on ne trouve que deux figures biffées, difficilement déchiffrables et qui en tout cas ne représentent pas la construction complète. Le problème analogue, pour un point extérieur, est résolu de deux manières différentes dans le manuscrit de van Schooten traité dans la pièce N°. I, et Huygens a ajouté à la seconde construction une démonstration (voir le problème 25 à la p. 14 de la pièce N°. I). Dans l'ouvrage „Exercitationum mathematicarum" etc. de 1657 (voir la note 3 de la Lettre N°. 128, p. 184 du T. I) van Schooten a publié (p. 107—110 du Livre I) la solution du problème plus général: „Triangulum ABC secare in data ratione rectâ EFG, procedente ex vel per datum punctum E, extra vel intra triangulum ABC."

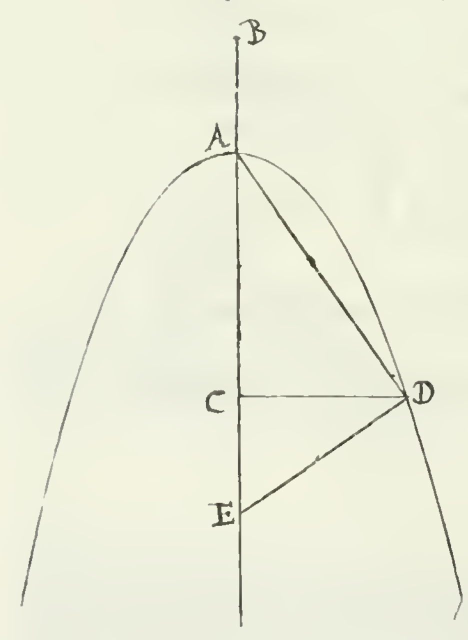
IV.[1]

[1645].

1.[2]

De latere recto Parabolae et quomodo inveniatur.

Si in diametro parabolae ubicunque punctum sumatur ut hic C et ex eo perpendicularis ducatur CD (quae ordinatim applicata dicitur) est linea quaedam sub qua, et linea AC rectangulum aequale semper est quadrato CD, haec linea certa est et una, vocaturque latus rectum parabolae[3]), ut hic AB. Hinc sequitur AC semper esse ad CD ut CD ad latus rectum AB.



Et ideo si CD fiat aequalis AC utrumque lateri recto aequale fore.

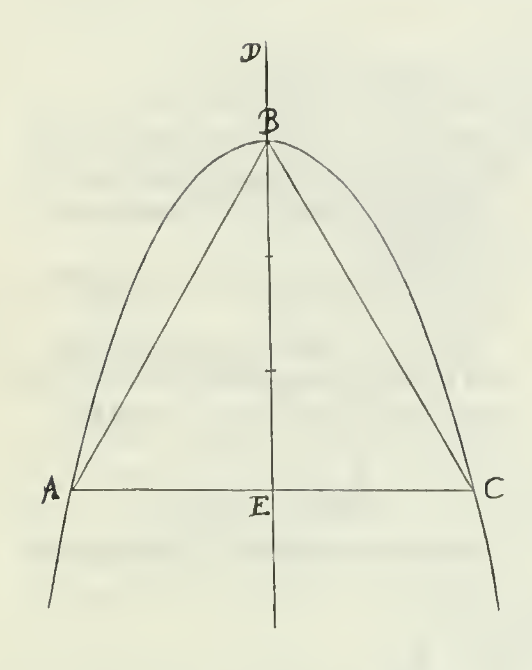
Invenitur itaque latus rectum si fiat ut AC ad CD ita CD ad quartum. Hoc est ducendo DE perpendicularem ad AD, erit semper CE aequalis lateri recto, AB.

---

[1]) Cette pièce contient plusieurs problèmes, solutions et théorèmes qui se rapportent aux coniques. Ils peuvent avoir été inspirés directement par la lecture des „Coniques" d'Apollonius dont l'étude avait été recommandée par Stampioen dans la pièce N°. 5 (p. 6 du T. I); mais peut-être aussi par l'instruction reçue de van Schooten (comparez les §§ 9—12 de la pièce N°. I).

[2]) La numération est de nous.

[3]) Comparez la Prop. XI du premier livre des „Coniques," p. 13 verso de l'édition de Commandinus, citée dans la pièce N°. 5, note 4 (p. 6 du T. I).



2.

In data Parabola conscribere triangulum aequilaterum.

Sit BD latus rectum Parabolae ∞ a. BE ∞ x.

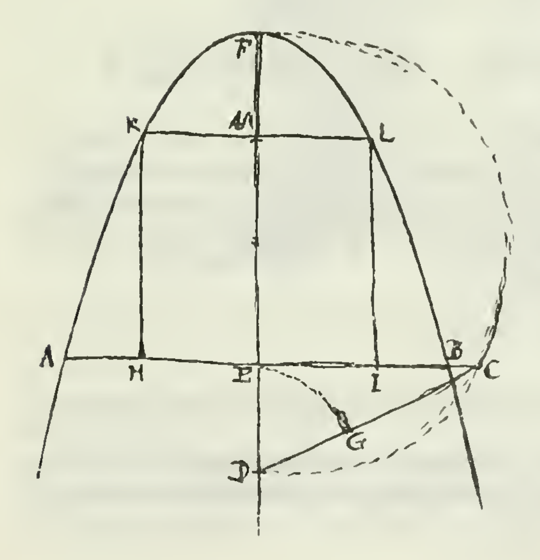
Ergo erit EC ∞ $\sqrt{ax}$, et

BC $\sqrt{ax+xx}$ ∞ 2 $\sqrt{ax}$ AC.

$ax+xx$ ∞ $4ax$

xx ∞ $3ax$

x ∞ $3a$.



3.

In data parte Parabolae conscribere quadratum.

Sit FE ∞ a; lat. rect. ED ∝ b; HE ∞ x. Erit ME $2x$, MF $a-2x$.

Ergo $a - 2x$ MF | b DE | m.

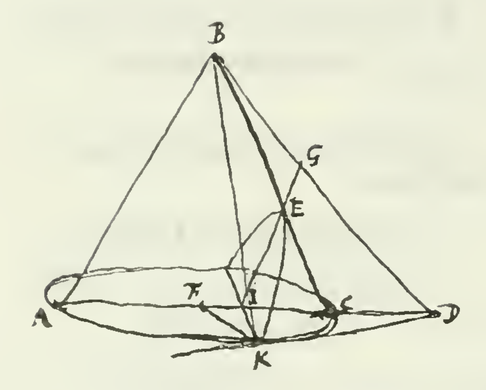
$ab - 2bx$ ∞ xx □ ML.

GC. $\sqrt{bb+ab} - b$ ∞ x.

4.

Invenire tangentem in Parabola EIK puncto K. [4])

Concipiatur planum BKD cono impositum, quod conum contingat in recta BK. KD sit contingens basin coni in puncto K. Oportet ergo invenire ubi IG secet DB.



Sit IE ∞ a; AF, FC ∞ b. Lat. rect. parab. ∞ r; IG ∞ x.

Ergo quia angulus FKD est rectus ut et FIK, KID, fiat ut FI $[\sqrt{bb-ar}]$ [5]) ad IK $[\sqrt{ar}]$ sic IK $[\sqrt{ar}]$ ad ID

$$\left[\frac{ar}{\sqrt{bb-ar}}\right]$$

ut IC $[b-\sqrt{bb-ar}]$ ad IE $[a]$ sic AC $[2b]$ ad AB $\left[\frac{2ab}{b-\sqrt{bb-ar}}\right]$.

$$\text{AF } [b] + \text{FI } [\sqrt{bb-ar}] + \text{ID } \left[\frac{ar}{\sqrt{bb-ar}}\right] \infty \text{ AD } \left[b + \frac{bb}{\sqrt{bb-ar}}\right]$$

$$\text{ut AD } \left[\frac{\sqrt{bb-ar}\,b+bb}{\sqrt{bb-ar}}\right] \text{ ad AB } \left[\frac{2ab}{b-\sqrt{bb-ar}}\right]$$

$$\text{sic ID} \left[\frac{ar}{\sqrt{bb-ar}}\right] \text{ ad IG } \left[\frac{2aar}{ar}\right]$$

Numeratores primi et secundi dividi possunt per b et denominator primi et tertii quia idem utrinque est, deleri, et opus erit tantum multiplicare numeratores secundi et tertii et productum hoc dividere per productum numeratoris primi in denominatorem secundi. multiplic. ergo $b+\sqrt{bb-ar}$ num.r primi, $b-\sqrt{bb-ar}$ denom. secundi, sit ar.

Ergo $2a \infty x$ [6])

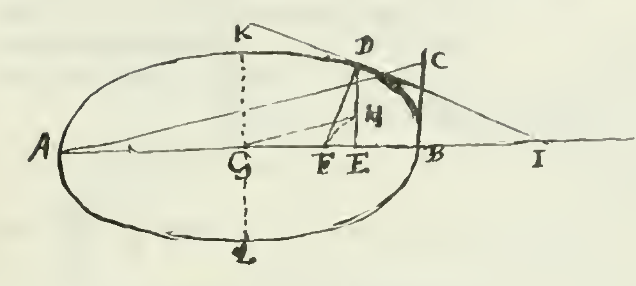
[4]) Comparez la prop. XXXIII du Livre I des „Coniques”, p. 24 de l'édition citée dans la note précédente.

[5]) Nous nous sommes permis quelques légers changements dans l'arrangement de cette pièce, mettant p. e. entre crochets les valeurs des lignes, indiquées dans le manuscrit en d'autres endroits.

[6]) Résultat obtenu par Apollonius par une autre voie.

5.

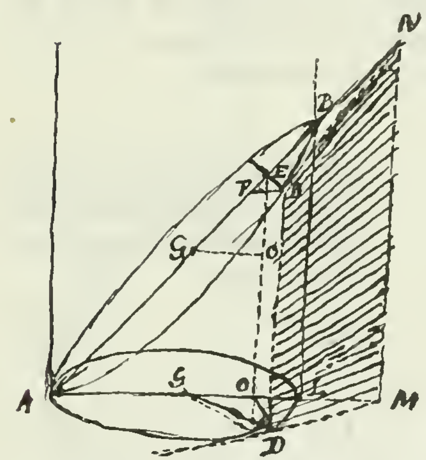
Ex dato puncto in ellipsi ducere lineam quae ellipsin tangat. [7])



In ellipsi ADC [8]) sit datum punctum D; demittatur inde perpend. DE; et fiat ut diameter AB ad latus rectum CB ita GE ad EF, dico si ab F ducatur recta ad datum punctum D, et ex D perpend. in DF eam tangere in puncto D ellipsin. [9])

Demonstr. Fiat cylindrus cujus basis aequalis KL in eo applicetur AB diameter ellipseos et erit similis ellipsis datae; ad exquirendam autem FE sit AB ∞ a; AL [10]) ∞ b; EG ∞ c; OD vel ED ∞ x; FE ∞ y.

Nunc fiat ut AB $[a]$ ad AL $[b]$ ita GE $[c]$ ad GO $\left[\frac{bc}{a}\right]$; et ut GO $\left[\frac{bc}{a}\right]$



ad OD $[x]$ ita OD $[x]$ ad OM $\left[\frac{xxa}{bc}\right]$ et ut AL $[b]$ ad AB $[a]$ ita OM $\left[\frac{xxa}{bc}\right]$ ad NE $\left[\frac{xxaa}{bbc}\right]$; et ut NE $\left[\frac{xxaa}{bbc}\right]$ ad ED $[x]$ ita ED $[x]$ ad EF $\left[\frac{bbc}{aa} \infty y\right]$.

Cum constet ad resolutionem hujus fractionis $\frac{bbc}{aa}$ inveniri oportere tertiam proportionalem, quae sit ad b ut b ad a, et hanc esse semper latus rectum, oportet igitur fieri a [AB] ad latus rectum [BC] ut c [GE] ad quaesitam y [EF], quod demonstrandum erat.

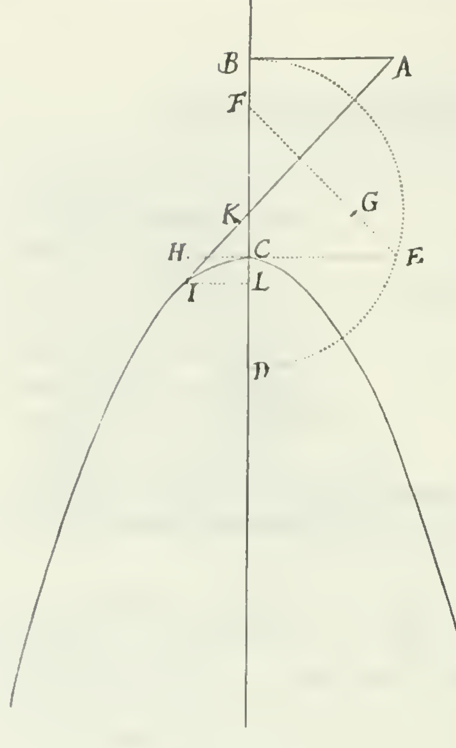
---

[7]) Comparez la prop. XXXIIII du Livre I der „Coniques," p. 25 de l'édition citée.

[8]) Lisez ADB.

[9]) Cette construction diffère sensiblement de celle d'Apollonius qui détermine la tangente à l'ellipse et à l'hyperbole par la propriété que AI : BI = AE : BE.

[10]) Voir, pour ce qui suit, la seconde figure, où l'on remarquera le double emploi des lettres G, O et D.



6.

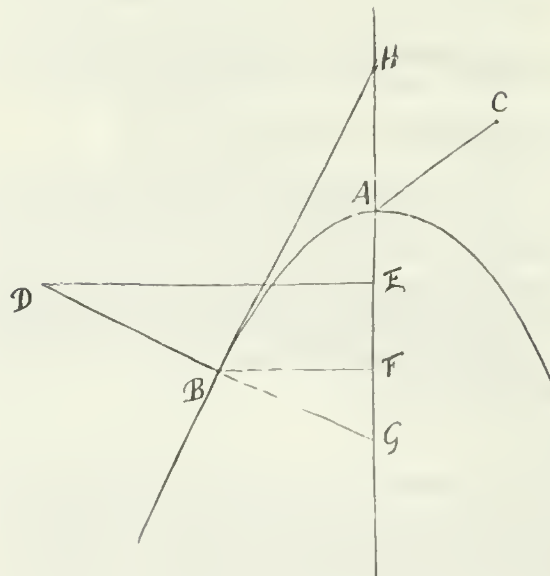
A dato puncto extra Parabolam ducere lineam quae Parabolam tangat. [11])

Sit datum punctum A, et ponendo pro lineis litteras Sit AB a, BC b, lat. rect. CD c, IL x. Quoniam ergo sumimus lineam AI tangere parabolam, erit ideo KC aequalis CL.

Ergo IL $[x]$ ad LK $\left[\frac{2xx}{c}\right]$ ut AB $[a]$ ad BK $\left[\frac{2xa}{c}\right]$ Et BK $\left[\frac{2xa}{c}\right]$ cum KC $\left[\frac{xx}{c}\right]$ aequalis BC $[b]$.

$$2xa + xx \infty cb$$
$$xx \infty -2ax + cb$$
$$x \infty \sqrt{aa + cb} - a$$ [12])

Constructio. FC est a, CE est $\sqrt{cb}$, FE est $\sqrt{aa + cb}$, FG est a, GE est $\sqrt{aa + cb} - a$, HC idem, IL sive x, idem. AI est contingens.



7.

Data parabola et puncto extra ipsam D, ducere lineam DB, quae parabolae occurrat ad angulos rectos.

Sit EG ∞ x; AE ∞ a; ED ∞ b; lat. r. AC ∞ l; ergo GF ∞ $\frac{1}{2}l$.

GE $[x]$ ad ED $[b]$ ut GF $[\frac{1}{2}l]$ ad FB $\left[\frac{1}{2}\frac{bl}{x}\right]$.

[11]) Comparez la prop. XLIX Probl. VI du Livre II des „Coniques", p. 60 verso de l'édition citée.

[12]) Christiaan ici, comme dans la pièce N°. II, ignore la racine négative et il est bien curieux de remarquer comment, par suite de cette circonstance, la seconde tangente lui échappe.

GF $[\frac{1}{2}l]$ ad BF $\left[\frac{1}{2}\frac{bl}{x}\right]$ ut BF $\left[\frac{1}{2}\frac{bl}{x}\right]$ ad FH $\left[\frac{1}{2}\frac{bbl}{xx}\right]$; FH ∞ 2FA [13]) ∞ $2a + 2x - l$; $\frac{1}{2}bbl$ ∞ $2axx - lxx + 2x^3$; $+ \frac{1}{2}lxx - axx + \frac{1}{4}bbl$ ∞ x^3. Solidum eſt. [14])

8. [15])

Si a dato puncto A in parabola, contingens ducatur AB et ex eodem, linea AD; ita ut CD ſit quarta pars lateris recti; dico tum AD aequalem fore DB. [16])

Sit enim CE ∞ a; lat. rectum ∞ l; ideoque CD ∞ $\frac{1}{4}l$. add. □ AE al; □ DE $aa - \frac{1}{2}al + \frac{1}{16}ll$; □ AD ſumm. $aa + \frac{1}{2}al + \frac{1}{16}ll$. haec ergo aequalis □.to BD, $aa + \frac{1}{2}al + \frac{1}{16}ll$. ut oportebat.

9.

Si parallela diametro paraboles linea AB incidat in parabolam, et ex puncto incidentiae B ducatur linea BC, ut CF ſit quarta pars lateris recti, dico tum angulum GBA aequalem eſſe angulo CBD.

Quia enim angulus GBA aequalis eſt angulo BDC, et angulus BDC aequalis angulo DBC, (utrumque hoc per Euclidem et propoſitionem antecedentem patet) erit quoque angulus GBA aequalis angulo DBC, quod probandum erat.

Hinc facile intelligi poteſt quare ſpecula parabolicae ſigurae fortiſſime omnium urant, ſi ſolis radiis exponantur.

---

[13]) Voir le 4me problème de cette pièce.

[14]) Huygens est revenu plus tard sur ce problème; voir p. e. ses „Contributions aux commentaires de van Schooten sur la Geometria Renati Descartes," que nous donnerons plus loin.

[15]) Ce théorème et le suivant se trouvent placés dans le livret manuscrit quelques pages plus loin, c'est-à-dire, après la pièce N°. VI, mais nous avons cru devoir les réunir avec les précédents. Ils contiennent une déduction très simple d'une des propriétés fontamentales du foyer de la parabole.

[16]) Huygens s'est servi de ce théorème dans la pièce N°. XII (p. 61).

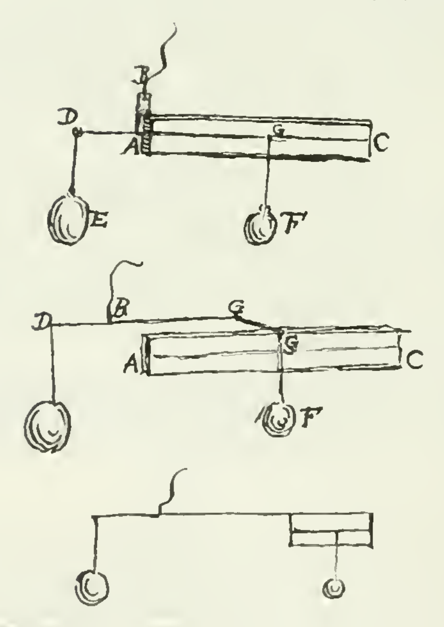
V.[1]

[1645].

Mechanica Elementa.

Propositio 1.

Pondus gravitati corporis aequale, appenſum ex centro gravitatis corporis aequipollet ejusdem gravitati. [2]



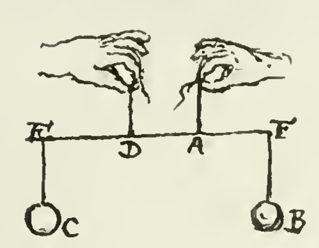
Pondus E aequilibret gravitati corporis AC; dico ſi remoto corpore AC ex ejus centro gravitatis G appendatur pondus F gravitati ipſius corporis aequale; etiam hoc aequilibrare ponderi E. Fingatur enim GϚ [3] ad angulos rectos juncta ipſi BG; et extremitati ejus Ϛ; appenſum idem corpus AC ex centro gravitatis Ϛ; igitur quia BGϚ ſupponitur deorſum flecti non poſſe, nihil faciet longitudo lineae GϚ, quominus idem efficiat corpus AC, quam ſi nulla ejus longitudo eſſet, ut in priori figura; cum itaque ſic conſtituto corpore omnis ejus gravitas dependeat ex puncto Ϛ, et appenſi ponderis F omnis gravitas ex eodum pendeat, conſequitur

[1]) Dans cette pièce Huygens se propose, à ce qu'il nous semble, de rendre plus compléte et plus rigoureuse la démonstration de Stevin de la propiété fondamentale du levier, démonstration, que l'on trouve aux pages 11—14 du Livre I de l'ouvrage „De Beghinselen der Weegh-

eundem eorum effectum esse, corporis nempe AC, et ponderis F in utraque figura. Idem erit etsi quantumvis corpus distet ab ansa, (ut hic infra[4]) ob easdem rationes.

Prop. 2.

Aequalia pondera inequalibus distantiis ab ansa non aequiponderant.

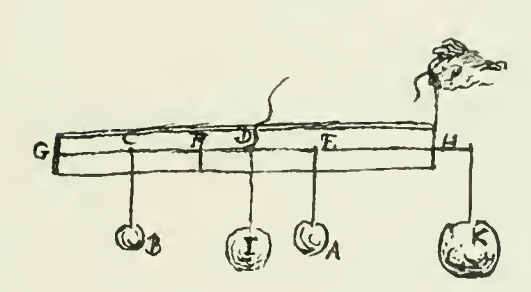


Pondus C sit aequale B, et distantia EA major AF, dico C et B non aequilibrare.

Sumatur enim ED aequalis AF, et ex duabus ansis libra suspendatur, D et A; hae itaque aeque multum sustinebunt: Ergo si omittatur ansa D pondus C descendet, ergo non aequilibrat ponderi B.

Prop. 3.

Si pondus A proportionem habeat ad B, ut distantia CD ad DE, dico pondera haec ex ansa D, esse in aequilibrio. [5])



Sumatur enim CF aequalis DE et prolongetur CE utrinque ut EH aequet FE, et GC CF, erit itaque HF ad FG ut A ad B et ansa D incidet in medium linea GH necessario.

Extendatur nunc in corpus, linea GH, ut gravitate aequet duo simul pondera A et B, igitur quia A et B suspensa sunt ex centris gravitatis; si corpus GH sumatur in aequilibrio

const", cité dans la note 12 de la pièce N°. 5 (T. I, p. 7); c'est l'ouvrage dont l'étude lui fut recommandée par Stampioen dans cette même pièce N°. 5.

[2]) En effet cette proposition, quoiqu'elle soit supposée implicitement dans la démonstration de Stevin, qui n'est qu'une modification de celle d'Archimède (voir le premier Livre du Traité de l'Équilibre des Plans), ne se trouve pas mentionnée dans les demandes („Begheerten") qui la précèdent aux pages 8—10 du livre cité de Stevin. Ajoutons que la preuve qui va suivre ne semble pas avoir paru satisfaisant à Huygens plus tard, puisque dans sa „Démonstration de l'équilibre de la balance" il cherche une autre voie pour remédier à ce même défaut qu'il y signale comme le point faible de la démonstration d'Archimède.

[3]) Voir la seconde figure.

[4]) Voir la troisième figure.

[5]) Il n'est pas clair pourquoi Huygens a préféré la demonstration plus compliquée, qui va suivre, à celle de Stevin qui semble de la même rigueur, la Prop. 1 étant une fois admise.

esse cum pondere K; B, quae aequipollet parti GF, una cum A quae aequipollet parti FH, erunt quoque in aequilibrio cum pondere K. Si itaque dicantur B et A non aequilibrare ex ansa D, sumantur aequilibrare ex alia, ut F[6]), sequitur ergo si ex F suspendero pondus I utrique aequale in aequilibrio id fore cum K; pondus I autem ex D suspensum est in aequilibrio cum K, et ex F suspensum plus potest quam ex D, per 2^dam^ pr. Ergo A et B tantum ex D aequiponderant.

Et e converso sequitur si A et B aequiponderant, proportionem habere A ad B, quam CD ad DE.

---

[6]) Le point F est donc un point arbitraire qui ne coïncide pas nécessairement avec le point F de la figure.

De Catena pendente.

Theorema 1.mum Si pondus suspendatur ex duobus funibus, hi producti secabunt sese in pendula ponderis gravitatis diametro.

Sit pondus DAC cujus pendula gravitatis diameter AB; suspensumque ex funibus ED, FC, ligatis in punctis C et D; dico si prolongentur ii funes, intersecturos se invicem in B puncto quod est in pendula gravitatis diametro.

Intelligatur enim primo EB, FB duo esse funes, ~~alligati~~ in B annexi extremitati bacilli BA, cujus alteri extremitati affixum sit pondus DAC ex suae gravitatis centro A, et bacillus AB horizonti perpendicularis, ita ut pondus DAC bacillo innitatur, bacillus vero in puncto B duobus funibus EB, FB, quorum ligatura in D et C omnino soluta sit; manifestum itaque est, pondus sic suspensum non descensurum ad hanc vel illam partem: Admoveantur nunc funes EB, FB, punctis D et C ibique firmentur, et tamen pondus in eodem situ manebit; Et jam non amplius baculo nitetur puncto B innititur sed suspensum erit ex funibus ED, FC, et hi producti in pendula gravitatis diametro se intersecant; quod erat demonstrandum.

Alterum hunc casum Stevinius bene demonstravit.

Imp. H. Kleinmann & Cie, Haarlem

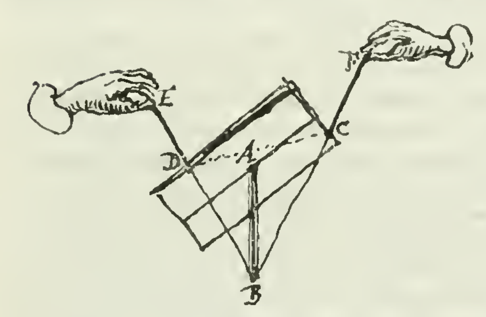
VI.

[1646]

La pièce a été publiée par P. J. Uylenbroek. [1])

De Catena pendente. [2])

Theorema 1.^{mum} *Si pondus suspendatur ex duobus funibus, hi producti secabunt sese in pendula ponderis gravitatis diametro.*



Sit pondus DAC cujus pendula gravitatis diameter AB; suspensum ex funibus ED, FC, ligatis in punctis C et D; dico, si prolongentur ii funes, intersecturos se invicem in B, puncto, quod est in pendula gravitatis diametro.

Intelligatur enim primo EB, FB duo esse funes in B annexi extremitati bacilli BA, cujus alteri extremitati affixum sit pondus DAC ex suae gravitatis centro A, et bacillus AB horizonti

---

¹) Chr. Hugenii, etc. Exercitationes Mathematicae, Fasc. II, p. 31.

²) La conception de cette pièce, où il est démontré „qu'une.... chaine pendue ne faict point une parabole, et quelle doit être la pression sur une corde... sans gravité pour en faire une", peut être considérée comme le premier coup d'aile du génie du jeune Huygens qui avait alors l'âge de 17 ans. Quel en a été l'origine? On ne peut par le savoir avec sûreté; mais il est présumable que Huygens ait connu l'édition des „Œuvres Mathématiques" de Stevin, annotée par Albert Girard, homme connu et beaucoup apprécié par Huygens, père. Et il semble même très probable que Huygens s'est servi de cet ouvrage, cité par nous dans la note 14 de la Lettre N°. 2709 (p. 187 du Tome X), pour étudier l'„Art pondéraire" de Stevin comme cela lui avait été recommandé par Stampioen dans la Lettre N° 5 (p. 7 du T. I). Alors il y aura rencontré l'assertion de Girard. (Voir la note 16 de la Lettre N°. 2709, p. 188 du T. X) que „les... cordes lasches ou fort estenduës sont des lignes paraboliques", ce dont Girard

perpendicularis, ita ut pondus DAC bacillo innitatur, bacillus vero in puncto B duobus funibus EB, FB, quorum ligatura in D et C omnino soluta sit; manifestum itaque est pondus sic suspensum, non decisurum ad hanc vel illam partem: Admo-

prétendait posséder la démonstration. Et Huygens se sera mis a chercher cette démonstration perdue.

Comme Huygens l'a raconté lui-même dans la pièce N°. 2724 (p. 217 du T. X), sa démonstration fut examinée par Descartes et c'est donc bien probablement à elle que se rapportent les paroles de Descartes qui suivent, et qu'on trouve dans sa lettre du 15 juin 1646 à le Leu de Wilhem, oncle de Christiaan Huygens (le N°. 9, p. 14 de notre T. I, publié aussi T. IV, p. 436 de l'édition d'Adam et Tannery des Œuvres de Descartes): „Il y a quelque tems que le Professeur Schooten m'enuoya un escrit que le second fils de Mr. de Zuylichem auoit fait touchant vne invention de Mathematique qu'il auoit cherchée, et encore qu'il n'y eust pas tout a fait trouué son conte (ce qui n'estoit nullement estrange pource qu'il auoit cherché vne chose qui n'a jamais eté trouueé de personne) il sy estoit pris de tel biais que cela m'assure qu'il deviendra excellent en cete science, en laquelle ie ne voy presque personne qui scache rien."

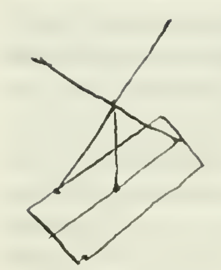
Dans sa première lettre à Mersenne, du 28 octobre 1646, (voir la p. 28 du T. I) Huygens mentionna sa découverte et promit de lui en envoyer la démonstration. Mersenne, dans sa réponse, (p. 31 du T. I) l'excite à chercher de même comment une corde devrait être chargée pour faire l'hyperbole ou l'ellipse, et lui communique que Galilée, dont Huygens probablement ne connaissait pas encore les ouvrages (voir la note 15 (p. 73) de la pièce N°. XIV) avait cru que la courbe de la chaîne était une parabole.

Deux mois plus tard, après un rappel que lui adressa Mersenne dans sa lettre du 8 décembre, (p. 46, T. I.), Huygens accomplit sa promesse, s'excusant du retard dans la lettre d'envoi du 23 décembre (p. 557 du T. II), en écrivant „quand j'ay trouué quelque chose de nouveau en Mathematiques je ne la mets pas incontinent par escrit, mais il me suffit de le pouvoir faire quand je veus, ou quand on m'en demande la demonstration: De la sorte doncques je n'avois encore rien escrit de cet affaire de la chaisne qu'une ou deux propositions."

Ces paroles font supposer que la pièce que nous donnons a été précédée encore d'une autre d'une rédaction plus sommaire, ou plutôt que les propositions 3 et 4 ont été ajoutées après coup, supposition qui trouve quelque appui dans une raie qui traverse la page du manuscrit. Quoiqu'il en soit, l'écrit envoyé à Mersenne en différait par ce qu'il était sans doute rédigé plus savamment par „suppositions" „propositions" et „corollaires," comme la lettre N°. 30 de Mersenne (T. I. p. 64) le prouve et de même la pièce N°. 20 (T. I. p. 34) qui ne représente d'ailleurs qu'un projet d'une lettre qui n'a jamais été expédiée sous cette forme. En effet, Huygens n'a envoyé son traité de la chaîne qu'avec la lettre du 23 décembre, comme cela résulte de cette lettre elle-même et du début du N°. 23[a] (T. 2. p. 554).

Mersenne, après la réception du petit chef d'œuvre, témoigne à trois reprises, dans les lettres N°. 24, 25 et 30 du 3, du 8 et du 24 janvier 1647 (T. I, p. 47, 50 et 64) de son admiration croissante; toutefois dans la dernière de ces lettres, en admettant pleinement la justesse du résultat, il fait des exceptions contre la méthode de démontrer qui, d'après le témoignage de Huygens dans sa lettre du 12 juillet 1648, que nous citerons plus bas, était celle de Stevin. Ce qui implique qu'elle ne différait pas sensiblement de celle de la pièce que nous reproduisons.

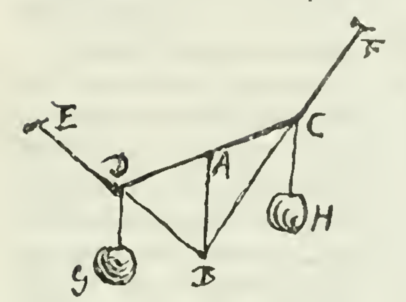
Au premier abord, ces remarques de Mersenne ne semblent pas avoir beaucoup impressioné Huygens; mais lorsque, dans la lettre N°. 50 du 15 mai 1648 (T. I, p. 93), Mersenne lui promit de faire imprimer le petit traité de la chaîne pourvu qu'il y ajoutât la démonstration



veantur nunc funes EB, FB, punctis D et C ibique firmentur, et tamen pondus in eodem situ manebit; At jam non amplius baculo neque puncto B innitetur sed suspensum erit ex funibus ED, FC, et hi producti in pendula gravitatis diametro se intersecant; quod erat probandum.

Alterum hunc casum Stevinius bene demonstravit. [3])

Sequitur ex hoc theoremate quod si in fune EDACF, nexa sint pondera G et H aequalia, in punctis D et C, haec non



posse ullo sito pendere nisi ut productae ED, FC concurrant in eodem puncto B quod in eorum pendula gravitatis diametro sit, quae diameter si pondera aequalia sint secat partem funis interjectam inter ponderum ligaturas D,C, in duas aequales partes; si autem D majus esset H, secaret ipsam DC, ita ut pars AD esset ad pondus H, ut pars AC ad pondus G.

Si enim DC rigidum supponatur apparet ex praecedenti theoremate non posse pondera alio situ suspensa manere nisi ut ED, FC productae conveniant in eodem puncto cum gravitatis diametro; at in eo situ

---

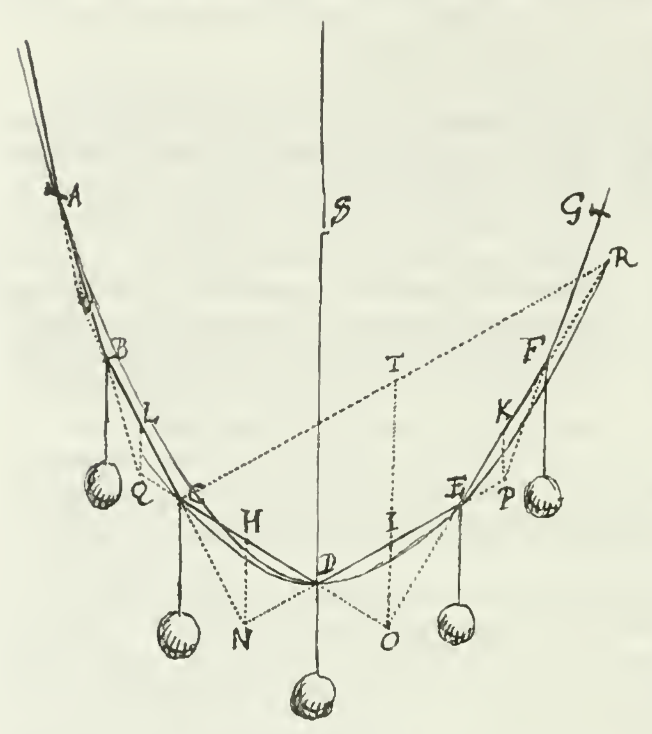
exigée, il se remit à l'œuvre et c'est sans doute à cette occasion qu'il redigea la pièce N°. 22 (T. 1, p. 40), où la démonstration se fonde sur un tout autre principe: celui que le centre de gravité se place aussi bas que possible. Quant à la pièce N°. 21 qui la précède, il est difficile de décider si elle date de cette même époque ou si elle appartient à la première rédaction qui fut envoyée à Mersenne en décembre 1646.

Ajoutons que le manuscrit de la pièce N°. 22 ne s'arrête pas là où cette pièce finit dans notre T. I; mais qu'il procède jusqu'à une proposition qu'on retrouve vers la fin de la pièce N°. 21 dans le dernier alinéa de la page 39. Mais cette dernière partie ne diffère pas assez de la partie correspondante de la pièce N°. 21 pour qu'il soit nécessaire de la reproduire.

Ainsi, quoique nous ne connaissions pas exactement la rédaction définitive du nouveau traité qui fut préparé pour Mersenne, les pièces N°. 21 et 22 lues à commencer par la dernière, nous en donnent une notion assez complète. De plus, nous avons la lettre N°. 57[b] du 12 juillet 1648, la dernière de la correspondance avec Mersenne, qui mourut le 1[er] septembre de la même année. Dans cette lettre Huygens lui manda [p. 569 du Tome II] qu'il avait „nouvellement reveu et corrigé", [le traité de la chaine] „et augmenté de la nouvelle demonstration du premier theorême" [la Prop. 1 de la pièce N°. 22] „qui m'a donné plus de peine presque que tout le reste du traitté, il a fallu 3 vel 4 lemmata" [voir les trois lemmata de la pièce citée] „quae ad conica spectant devant que de le pouvoir demonstrer, et pourtant j'ai aymé mieux prendre toute ceste peine que de bailler la demonstration de Stevin" [celle du Theorema 1[mum] de la pièce ici reproduite, démonstration, qui en effet n'est qu'une ampliation de celle qu'on trouve p. 57 et 58 de l'ouvrage de Stevin, cité dans la note 12 de la pièce N°. 5 (T. I, p. 7)] „pour suffisante, car il me semble qu'elle ne l'est pas." Après quoi Huygens fait suivre: „Il ne me reste maintenant qu'à descrire mon traitté, et je vous l'envoyeray aussitost, affin que vous en disposiez comme bon vous semblera."

[3]) Voir la p. 57 de l'ouvrage de Stevin, cité dans la note 12 de la pièce N°. 5 (T. I, p. 7).

non manerent, nisi eorum centrum gravitatis A tunc centro terrae quam proxime potest admotum esset [4]); ergo et hic ubi DC rigida non est sed tamen tensa semper ut et aliae ED, FC, apparet centrum eorum gravitatis A centro terrae propius admoveri non posse, ac proinde quoque praedicto situ suspensa manere debere.



Propos. 2. Propositus nunc sit funis ADG in quo aequalibus intervallis ligata sunt aequalia pondera.

Manifestum itaque est eo situ ea pendere debere ut bina quaeque internodia, relicto uno intermedio, producta, sese intersecent in pendula duorum ponderum, gravitatis diametro: Sic BC, ED sese intersecant in puncto N, quod est in pendul. gr. diametro ponderum suspensorum ex C et D. dicantur enim BC et ED invicem non secare in N: Si ergo firmentur puncta B et E in eisdem punctis ubi nunc pendent, hoc quidem situm punctorum C et D nihil immutabit; sed firmatis iis, pondera ex

[4]) Dans l'écrit envoyé à Mersenne en décembre 1646 cette remarque (que le centre de gravité des poids G et H, et par suite le point A, s'approchent, dans la position de la figure autant que possible du centre de la terre), doit avoir pris la forme d'un Corollaire. Et c'était par la démonstration de ce Corollaire que Mersenne conseilla Huygens de commencer toute la „spéculation de la chorde." Voir la lettre du 24 janvier 1647, p. 64 du Tome I.

Pour subvenir à cette observation, Huygens avait à remplaçer (voir l'axiome 5 de la pièce N°. 22, T. I, p. 41) les cercles que les points D et C peuvent décrire, par leurs tangentes, pour chercher ensuite le lieu du point A. Or, la solution de ce problème, qui est contenue dans le Lemma 1 de la pièce N°. 22, se trouvait toute faite au Caput III, p. 14 de l'ouvrage de van Schooten de 1646, cité dans la note 2 de la Lettre N°. 30 (T. I, p. 65) et sans doute le nom „Schoten," écrit en marge du manuscrit de la pièce N°. 22, a quelque rapport avec cette circonstance.

Le lieu du point A une fois connu, Huygens, pour arriver à la „propositio I" de la pièce N°. 22, avait encore à démontrer que l'ellipse en question est coupé à angle droit par la verticale AB de la figure du texte, ce qu'il fit dans le Lemma 2 de cette pièce N°. 22. Ajoutons qu'en 1688 il a repris cette démonstration, voir la note 17 de la pièce N°. 2724 (T. X, p. 218).

C et D aliter non poſſunt ſuſpendi quam ut interſectrio productarum BC, ED ſit in pend. grav. diametro, ergo apparet et ante ſic ſuſpenſa fuiſſe.

Eodem modo demonſtrari poteſt, AB et DC ſe interſecare in pend. gr. diametro ponderum ex B et C pendentium, et ita de quotlibet aliis in infinitum aſcendentibus. Facile hinc erit, ſi nota habeamus tria puncta C, D et E catenae hujus, caetera quoque invenire ut B, F, A, G. Oportet enim DE biſariam dividere in I et agere IO parallelam ipſi SD, et ex O, ubi producta CD illam IO ſecat, per E ducere OF et ponere EF aequalem DE, et habebimus punctum F. Simili modo et reliqua reperiri poſſunt.

Prop. 3. Linea quae per haec puncta ducitur valde parum diſtare videtur a linea parabolica, quam tamen non refert.[5]) Quod ſic demonſtrabitur.

Deſcribatur per puncta C, D, E, parabola CDER[6]), dico hanc non tranſire per punctum F. Fiat enim ut OD ad DC ſic OE ad ER, quae ſignetur in OEF productâ, dico primò punctum R eſſe in eadem linea parabolica cum punctis C, D, E; producatur enim OI, ducaturque CR quae ipſam ſecet in T; et quoniam eſt DC ad ER ut OD ad OE, linea autem OT ſecat ipſam DE biſariam, manifeſtum quoque eſt ipſam CR biſariam ſectam in T; porro cum puncta C,D, E, ſint in parabola, et CT aequalis TR et CR aequidistans ipſi DE neceſſario quoque punctum R erit in eadem parabolica linea, alias enim OT non eſſet parabolae diameter per 28 Con. Apoll. lib. 2 [7]). quod abſurdum eſſet quia axi DS parallela eſt ex conſtructione. Cum itaque punctum R ſit in parabolica linea eadem in qua eſt punctum E, ſequitur punctum F in ea non poſſe eſſe, quia deberet recta linea OR parabolam in tribus punctis ſecare quod abſurdum eſt: vel punctum R coincidere cum puncto F, quod impoſſibile eſt, cum OE ſemper major ſit OD [8]), et quam proportionem habet OD ad DC eam habeat OE ad ER, ergo ER ſemper quoque major DC ſive EF, et idcirco puncta R et F non poſſunt coincidere.

Poſtquam itaque vidimus pondera aequalia aequalibus internodiis ligata non pendere ſecundum lineam parabolicam, Quaeramus nunc quae internodiorum debeat ad invicem eſſe proportio, ſecundum quam pondera aequalia ex chorda religata ſecundum lineam parabolicam pendeant.

Propos. 4. Sit igitur data linea parabolica ABCDEF [9]) cujus axis horizonti perpendicularis et ſint nectenda ex chorda aliquâ pondera quotlibet aequalia, quae ſi certa ratione quadam ſuſpendantur, puncta in quibus chordae alligata ſunt, omnia ſint in data linea parabolica.

---

[5]) On retrouve cette proposition dans la pièce N°. 21 comme Prop. 8.

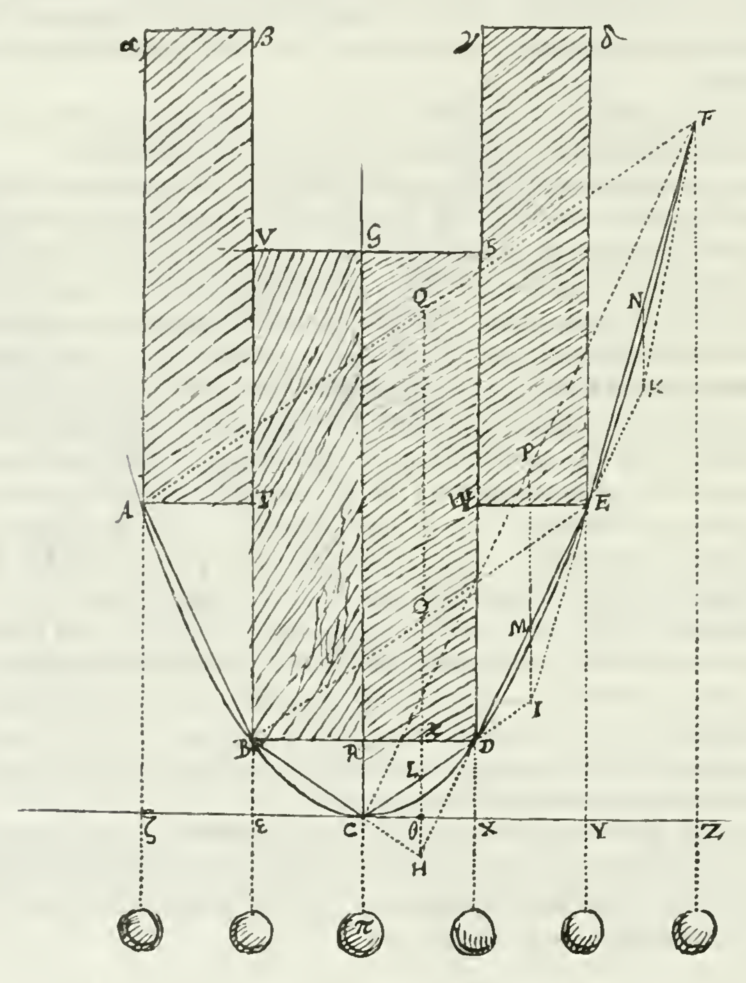
[6]) L'axe étant supposé vertical.

[7]) „Si in coni sectione, uel circuli circumferentia duas lineas acquidistantes recta linea bifariam secet, diameter erit sectionis." (voir p. 55 de l'édition de Commandin, citée T. I, p. 6, note 4.)

[8]) C'est-à-dire en supposant que le point D est le point le plus bas de la chaîne.

[9]) Voir la figure de la page suivante.

Ducatur ζZ, quae parabolam in vertice contingat ideoque ſit ad axem GC ad angulos rectos, et ponatur utcunque BC eique aequalis CD, ita ut puncta B et D ſint in data parabola; dividatur porro CD bifariam in L, et parallela axi GC ducatur QLH, quae à producta BC ſecetur in H: ſiat vero ut CH ad CB, ita HD ad DE, eaque ponatur in producta HD. DE rurſus bifariam ſecetur in M et ducatur axi GC parallela PI, et ex I ubi illa interſecatur a producta CD, duca-



tur per E, linea IENF, et ſit ut ID ad DC ſic IE ad EF. ab altera parte axis ſimiliter inveniatur punctum A, etc. Sic inventa puncta erunt in datâ parabolica linea; id enim ſimili modo probari poteſt, quo in 3^{tia} propoſitione probatum eſt punctum R in eadem linea parabolica eſſe in qua puncta C,D,E; haec enim ſimili modo quo illud inventa sunt. Si ergo per puncta A, B, C, D, E, F, chorda tendatur, et in unoquoque horum punctorum aequale pondus nectatur, et haec catena ex duobus

quibuslibet eorundem punctorum (sumamus A et F) suspendatur, dico praestitum esse quod postulabatur; Situm enim hunc retinebunt, cum bina quaeque internodia, puta BC et ED, intermedio relicto uno CD se intersecent in pendula duorum ponderum gravitatis diametro in H [10]); et demonstratum jam est in data parabola esse.

Manifestum hinc quoque est, si aequalia pondera secundum parabolicam lineam pendeant, tunc si producantur BC, ED, fore ut HC ad CB sic HD ad DE.

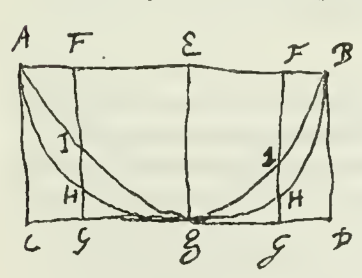
Varia autem hic contemplanda occurrunt, et quidem prae caeteris notatu dignum, quod chordae FZ, EY, DX, et C[π] etc., ex quibus pondera haec dependent omnes aequalibus intervallis distant, id est, si secentur a linea ζ Z, spatia interjecta ZY, YX, XC etc. omnia esse aequalia. CH enim aequalis est CL, ergo quia sicut HC ad CB, sive ut CL ad CD, sic HD ad DE, erit quoque DE dupla DH; quia autem HD est ad D$\varkappa$ ut DE ad EW, erit etiam WE sive XY dupla $\varkappa$D sive θX, id est aequalis CX. Similiter de spatio ZY demonstratur quia enim ID est aequalis DL sive dimidiae DC, et est sicut CD ad DI, ita FE ad EI, erit et ideo EF dupla EI et consequenter spatium ZY aequale spatio YX. Apparet ergo hinc si puncta B C D E F sint in linea parabolica, spatia CX, XY, YZ esse aequalia; conversum autem aeque verum est, nempe si haec spatia aequalia sunt puncta B C D E F in linea parabolica esse, cum enim XY data est aequalis CX data est linea YE, et cum sit quoque data HE, data etiam est earum intersectio E, quae non potest nisi in unico puncto esse.

Hinc sequitur, [11]) quod si loco appensorum ponderum imponantur punctis A, B, C, D, E, parallelepipeda aequalia A$\varkappa\beta$T, BVGR, RGSD, W$\gamma\delta$E ex

---

[10]) Huygens annota ici en marge „ex constr."

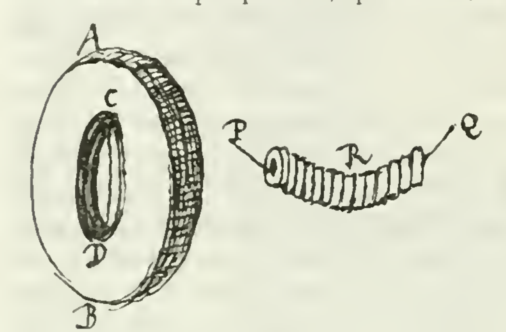
[11]) Après plus de vingt ans Huygens annota ici en marge „non sequitur neque est verum. 1668." En effet, dans la supposition qui va suivre dans le texte, il faut, en négligeant la friction, que la tension T_0 de la corde soit partout la même. On aura donc dans le cas limite $T_0 \frac{dy}{ds} = \mu x$, d'où il suit facilement que la courbe en question doit être alors un arc de cercle, accompagné, s'il en est besoin, de deux droites verticales, et non pas une parabole. Nous ne savons pas si Huygens a connu ce résultat; mais nous pouvons indiquer avec beaucoup de probabilité quelle a été l'occasion qui lui a fait reprendre en 1668 ses recherches sur la chaîne. C'était à propos de la lecture d'un ouvrage imprimé ou, plus probablement, d'un manuscrit, d'un certain Regnault ou Regnauld. Cela résulte d'une annotation qui se trouve dans le livre des Adversaria D à un lieu qui correspond très bien à la date de 1668. Voici cette annotation:



„Mr. Regnauld veut qu'une chaine AIgIB estant attachée par A et B, et ayant son affaisement EG" [lisez Eg] „égal à la moitié de AB, se courbe suivant AIgIB qu'il décrit en faisant le ▭ ACDB, et mettant FI proportionelle aux lignes GF, HF, AHGHB" [lisez AHgHB]

materia quâlibet, quorum alterum alterius pressionem non impediat, relinquatur autem appensum pondus π, chordam eundem situm retenturam, quem habuerat appensis ponderibus. et quantumvis extremitates chordae A, F, aperiantur, semper tamen puncta in quibus parallelepipeda haec premunt fore in linea parabolica; semper enim premetur chorda ab aequalibus ponderibus quae sita erunt ex aequalibus distantiis, ut erant ante.

Notandum quoque est, quia CX, XY, YZ sunt spatia aequalia et puncta C, D, E, F sunt in parabola, quam ζZ contingit in vertice C, spatium DX esse 1, spatium EY, 4, spatium FZ 9, et sic porro secundum seriem consequentium quadratorum.



Praeterea notandum triangula omnia, CHD, DIE, EKF esse aequalia, singula vero triangulo CRD.

Possunt autem et cylindri sumi, qualis hic appositus est AB, in medio magno foramine CD perforatus, per quod trajicienda est chorda: Si enim quotlibet talium cylindrorum ex chorda suspendantur (chordam autem nullius ponderis esse, et cylindros mutuo contactu a pressione nihil impediri postulo) pendebunt secundum lineam parabolicam, ut videre est in cylindrulis R; quantumvis etiam extremitates chordae P, Q dilatentur vel conjungantur.

„estant un demi cercle. le probleme que Mr. Regnault propose est assurement des plus difficiles à resoudre. Et quant à la solution qu'il en donne j'y trouve ces deux choses à dire.

Premierement que sa demonstration ne prouve nullement ce qui est proposé, la considération du levier ni du momentum ponderis n'y estant pas bien prise, et encore moins celle des espaces parcourus par le mouvement acceleré.

Secondement que sa courbe AlgIB, suivant la construction qu'il en donne n'est autre chose qu'une parabole dont le paramètre est Eg, quoy qu'il pense avoir demonstré le contraire."

Après 1668 Huygens semble avoir laissé tomber complètement le sujet jusqu'à la date mémorable où Jean Bernoulli proposa aux géomètres dans les „Acta" du mois de mai 1690 le problème de la chaînette. Voir la correspondance de 1690—1693, T. IX et X de notre publication.

VII.

[1646].

De numeris perfectis.

Regula ad inveniendos numeros perfectos talis eſt [1]). Cape quamvis poteſtatem radicis 2, quae detracta unitate relinquat numerum primum, ejus dimidium duc in eam (poſtquam ab illa unitatem detraxeris), et productum erit numerus primus [2]). Caeterum in eo omnis difficultas eſt, nempe in inveniendis talibus poteſtatibus radicis 2, quae dempta unitate relinquant numerum primum, ne autem omnes perveſtigare neceſſe ſit (quod immenſi laboris eſſet) ſciendum eſt eas tantum explorandas eſſe quae (poſita pro 2, a) conſtant exponente primo numero, ut ſunt a^{11}, a^{7}, a^{13}, etc.: quae vero habent exponentes non numeros primos, detracta unitate ſemper poſſe dividi, ut 63, ſive $a^{6}-1$, 511, ſive $a^{9}-1$ etc. Explorandas autem eſſe et quae exponentes numeros primos habent, et nonnunquam dividi poſſe oſtendit numerus 2047 ſive $a^{11}-1$, cum tamen 11 ſit numerus primus, hic enim dividi poteſt per 23 et 89. Plurimi autem antehac pro numeris perfectis habiti ſunt cum tamen non ſint, quales ſunt inter eos quos Peletarius [3]) recenſet, in annotationibus ad Gemmam Friſium [4]) ubi putat in ſingulis decuplis augmentis unum talem reperiri, quod omnino falſum eſt.

---

[1]) Comme on le sait, on appelle „nombres parfaits" les nombres qui égalent la somme de leurs propres facteurs (simples et composés) en y comptant l'unité. La règle pour leur calcul qui va suivre, revient à l'emploi de la formule $2^{n-1}(2^{n}-1)$, où $2^{n}-1$ doit être un nombre premier. Elle est donnée par Euclide au Livre IX de ses „Éléments".

[2]) Lisez: „perfectus"

[3]) Jacques Peletier, littérateur, médecin et mathématicien, naquit au Mans en 1517 et mourut à Paris en 1582.

[4]) Renerius Gemma, surnommé Frisius, né en 1508, mort en 1558, était professeur de médecine à l'Université de Louvain. Il s'agit ici de l'ouvrage suivant: „Arithmeticae practicae methodus facilis, per Gemmam Frisium, Medicum, ac Mathematicum conscripta: jàm recens ab Auctore pluribus locis aucta & recognita. In eandem Joannis Steinii & Jacobi Peletorii Annotationes. Antwerpiae. Ex officina Loëana, apud Petrum à Tongris. Anno 1581 in 8°."

On y lit à la page 10 dans une des annotations de Peletier: „Numerus Perfectus dicitur, qui integrè constat ex aggregato omnium numerorum, qui ipsum numerant. Veluti 6, quem numerant 3, 2, 1, atque ij juncti, faciunt 6. Numerus Perfectus semper in 6 vel 8 terminatur. Intra primum Denarium, hoc est ab 1. ad 10, solus Senarius est Perfectus. Intra secundum Denarium, silicet a 10, usque ad 100, solus 28 est perfectus: 100 ad 1000. solus 496: A 1000 ad 10000 solus 8128: In summa vnicus numerus Perfectus in quolibet decuplo augmento."

VIII. [1]

[1646].

I. [2]

Data maxima quatuor proportionalium invenire caeteras, ita ut differentia 2^dae et quartae sit maxima que [3]) esse possit.

Sit prima maxima data ∞ a, secunda ∞ $x+y$ et $y \infty 0$. Ergo a ad $x+y$ ut $x+y$ ad $\frac{xx+2xy+yy}{a}$ tertia. Et iterum a ad $x+y$ ut $xx+2yx+yy$ [4]) ad $\frac{x^3+3xxy+3yyx+y^3}{aa}$ quarta.

$$x+y \text{ secunda subt. } \frac{x^3+3xxy+3yyx+y^3}{aa} \text{ quarta.}$$
$$aax+aay-x^3-3xxy-3yyx-y^3$$

Deleantur quae non habent y, et fit $aay-3xxy-3yyx-y^3 \infty 0$. Divid. per y. $aa-3xx-3xy-yy \infty 0$. Deleantur hic quae habent y. $aa \infty 3xx$. $\frac{1}{3}aa \infty xx$. $\sqrt{\frac{1}{3}aa} \infty x$ secunda.

Et erunt quaesitae proportionales a (prim.), $\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ (2da), $\frac{1}{3}a$ (3^{tia}), $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}aa}$ (4ta) [5]).

---

[1]) Sept problèmes „de maximis et minimis" avec leurs solutions. On reconnaîtra facilement la méthode et la notation exposées au § 11 de la pièce N°. I. Consultez toutefois la note 11 de la pièce présente.

[2]) La numération est de nous.

[3]) Lisez: *quae*.

[4]) Lisez: $\frac{xx+2yx+yy}{a}$.

[5]) Comparez la note 11 de la pièce N°. I.

2.

Data maxima trium proportionalium invenire duas reliquas, ita ut differentia inter mediam et minimam sit maxima quae esse possit.

Sit prima a, et minima $x + y$. Igitur media erit $\sqrt{ax + ay}$. Subtr. $x + y$ minima. $\sqrt{ax + ay} - x - y$, deleatur omne quod non habet y, ut hic x: caetera quadrentur.

$$ax + ay - 2y\sqrt{ax + ay} + yy$$

deleantur quae non habent y ut ax.

$$ay - 2y\sqrt{ax + ay} + yy \infty 0. \text{ divide per } y$$

$$a - 2\sqrt{ax + ay} + y \infty 0$$

$$\frac{a + y}{2} \infty \sqrt{ax + ay}$$

$$aa + 2ay + yy \infty 4ax + 4ay \text{ deleantur quae habent } y$$

$$aa \infty 4ax$$

$$\tfrac{1}{4} a \infty x.$$

Eruntque quaesitae proportionales a —— $\frac{1}{2} a$ —— $\frac{1}{4} a$.
Differentia inter mediam et minimam erit $\frac{1}{4} a$, quâ non poteſt dari major.

3.

Datis duabus lineis inaequalibus invenire mediam inter ipsas, ita ut si ab illâ minima detrahatur, et ipsa detrahatur à maxima, rectangulum sub duobus residuis sit maximum quod esse possit.

Sint lineae datae a et b et quaesita media $\infty x + y$ et $y \infty 0$.

	a	$x + y$	$x + y - b$ } mult.
sub.	$x + y$	sub b	$a - x - y$
resid.	$a - x - y$	resid. $x + y - b$	$- xy - yy + by$

$$- xx - xy + bx$$

$$\underline{ax + ay - ab}$$

$\square$ duorum resid. $ax + ay - ab - 2xy - xx + bx - yy + by$

deleantur quae non habent y $\quad ay - 2xy - yy + by \infty 0$

$$a + b \infty 2x$$

$$\frac{a + b}{2} \infty x.$$

Hoc idem erat ac si linea dividenda esset ita ut rectangulum sub segmentis fieret maximum. 1653. [6])

[6]) La date ne se rapporte qu' à l'annotation.

4.

Data lineâ et puncto extra ipsam, ex eodem in datam lineam, aliam incidentem ducere, ita ut solidum ex ipsa incidente et segmentis quae in data linea efficientur, sit omnium maximum.

Sit data linea AB $\infty\ a$; punctum datum C; CD $\infty\ b$, AD $\infty\ c$, AE $\infty\ x + y$ et $\infty\ x$, $y \infty\ 0$.

$$\square\ \mathrm{CD}\ [bb]\ \text{add.}\ \square\ \mathrm{ED}\ [cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy]\ ^{7)}.$$

$$\square\ \mathrm{EC} \infty\ bb + cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy.$$

$$\mathrm{EC} \infty \sqrt{bb + cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy + xx}\ \text{quae vocetur } \$.$$

$$\text{m.}\left\{\begin{matrix}\mathrm{AE} & x + y \\ \mathrm{EC} & \$\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix}\sqrt{bb + cc - 2cx + xx} & \mathrm{EC} \\ x & \mathrm{AE}\end{matrix}\right\}\text{m.}$$

$$\text{m.}\ ^{8)}\left\{\begin{matrix}\square\ \mathrm{AE, EC} & x\$ + \$y \\ \mathrm{EB} & a - x - y\end{matrix}\right. \qquad \begin{matrix}x\sqrt{bb + cc - 2cx + xx} & \square\ \mathrm{AE, EC} \\ a - x & \mathrm{EB}\end{matrix}\right\}\text{m.}$$

$$ax\$ + a\$y - xx\$ - 2x\$y - \$yy \infty\ ^{9)} ax\sqrt{bb + cc - 2cx + xx} - xx\sqrt{bb + cc - 2cx + xx}.$$

$$\$\ \text{five}\ \sqrt{bb + cc - 2cx - 2cy + 2xy + yy + xx} \infty \frac{ax\sqrt{bb + cc - 2cx + xx} - xx\sqrt{bb + cc - 2cx + xx}}{ax + ay - xx - 2xy - yy}$$

et post longam operationem [10]

$$\begin{matrix} 6x^4 + 6cx^3 + 4ccxx + 2caax + 2aacc \infty\ 0 \\ - 10a\ldots + 4bb\ldots - 6acc\ . + 2aabb \\ + 4aa\ldots - 6abb. \\ - 8ac\ldots \end{matrix}$$

5.

Data majore e tribus Invenire tres proportionales, ita ut rectangulum ex minima, et differentia mediae et maximae, sit maximum quod esse possit.

Sit major a, media $x + y$. Ergo minima $\dfrac{xx + 2xy + yy}{a}$ } m.

diff. max. et med. $a - x - y$ } m.

$$\begin{array}{r} -xxy - 2xyy - y^3 \\ -x^3 - 2xxy - xyy \\ axx + 2axy + ayy \\ \hline 2axy - 3xxy \infty\ 0 \\ 2a \infty\ 3x \\ \frac{2}{3}a \infty\ x \end{array}$$

deleantur hinc quae non habent y, et quae habent plus quam unam y, [11] et reliquum erit $\infty\ 0$.

---

[7]) Le terme xx est oublié mais il est restitué plus loin.

[8]) Nous supprimons la multiplication.

[9]) Comme on le voit, Huygens égale la valeur variée $\varphi\,(x+y)$ de la quantité dont il cherche le maximum, à la valeur primitive $\varphi\,(x)$.

[10]) C'est-à-dire en élevant au carré et en divisant par y, posant ensuite $y = 0$. Mais il y a eu des erreurs de calcul.

[11]) C'est là, en germe, la modification apportée par Huygens à la méthode de Fermat et exposée

6.

Data linea a *dividere in duas partes ita ut ſolidum ſub quadrato unius partis et altera ſit maximum quod eſſe poſſit.*

Sit una pars $x + y$ et $y \propto 0$. Ergo

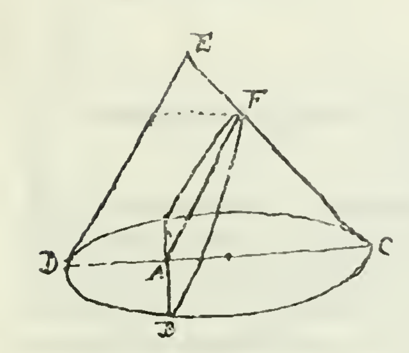
m. [8]) $xx + 2xy + yy$  $x + y$

$a - x - y$ reliq. pars

$2axy \propto 3xxy$

$2a \propto 3x$ $\frac{2}{3}a \propto x$.

7.



Invenire maximam in cono parabolam.

Quia omnis parabola ſecundum Archimedem[12]) eſt ſeſquitertia rectanguli quale hic eſt ſub AF, AB, opus erit tantum invenire quomodo rectangulum hoc poſſit eſſe maximum; ſit ergo DC $\propto a$, DE $\propto b$, AC $\propto x$. CD (a) ad DE (b) ut AC (x) ad AF $\left(\frac{bx}{a}\right)$. [13])

---

plus tard dans l'ouvrage mentionné dans la note 30 de la pièce N° I (p. 19.) Ajoutons que dans la multiplication, qui se trouve ici à côté, les termes sans y et les termes contenant yy et y^3 ont été biffés en effet.

[12]) Dans l'ouvrage: „Quadratura parabolae", voir la page 349 du T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2 de la pièce N°. IX qui suit.

[13]) Huygens fait suivre ici un calcul, biffé depuis, où, par mégarde, il détermine le maximum de AF $\times$ AD $\times$ AC au lieu de celui de AF $\times \sqrt{\text{AD} \times \text{AC}}$. Il y est revenu en 1653. Alors, posant AC $= x$, il trouve facilement ▭ FAB $= \frac{bx}{a}\sqrt{ax - xx}$, après quoi il écrit:

„$\frac{bx}{a}\sqrt{ax - xx} \propto \frac{bx}{a}\sqrt{ax + ay - xx - 2xy} + \frac{by}{a}\sqrt{ax + ay - xx - 2xy}$"

d'où il déduit successivement, „$\frac{x\sqrt{ax - xx}}{x + y} \propto \sqrt{ax + ay - xx - 2xy}$

$$\frac{ax^3 - x^4}{xx + 2xy} \propto ax + ay - xx - 2xy$$

$$ax^3 - x^4 \propto ax^3 + ayxx - x^4 - 2x^3y + 2axxy - 2x^3y$$

$$3axx \propto 4x^3$$

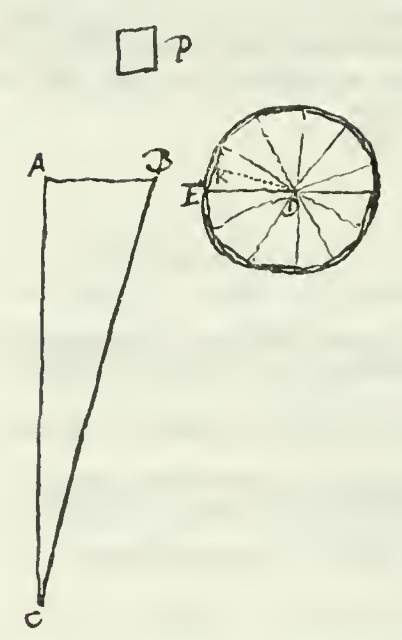
$$3a \propto 4x,\ \tfrac{3}{4}a \propto x$$"

IX. [1])

[1646].

1.

Triangulum rectang. ex semidiametro base et circumferentia altitudine aequale est circulo. [2])

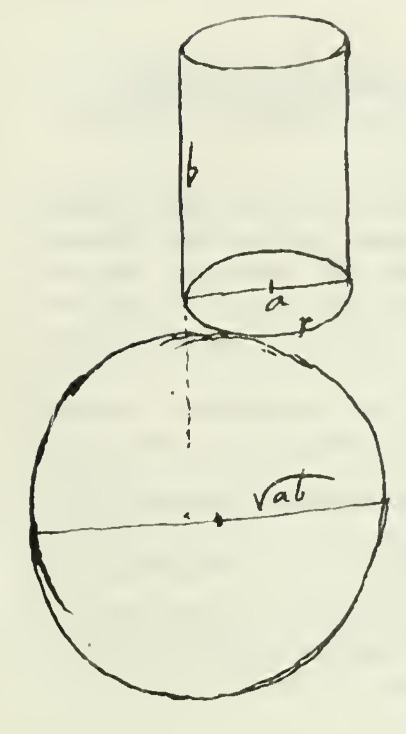


AC est circumferentiae circuli aequalis, AB semidiametro ED. si ergo dicatur triangulum ABC non esse aequale circulo; sit ergo primum minus circulo, quantitate P, et ei inscribatur figura aequilatera, ita ut differentia inter ipsam et circulum sit minor quantitate P (potest enim fieri haec differentia minor quavis quantitate;) cum itaque haec figura inscripta minor sit triangulo ABC, (KD enim minor est ED) et tamen inter ipsam et circulum minor sit differentia quam inter triang.um ABC et circulum, eadem quoque major esset triangulo ABC quod esset absurdum. Simili quoque modo probari potest nec majus esse circulo, circumscribendo figuram circulo, ergo debet aequalis esse.

Ad ejusmodi quoque modum demonstrari potest, rectangulum sub altitudine et circumferentia basis cylindri, aequale esse ipsius superficiei.

[1]) La pièce contient quelques démonstrations élémentaires de théorèmes qu'on retrouve chez Archimède. Nous l'avons divisée en paragraphes.

[2]) C'est la première proposition de la „Dimensio circuli" d'Archimède (voir T. I, p. 259, de l'édition de J. L. Heiberg „Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii, Lipsiae, Teubner, 3 vol., 1880—81). La démonstration qui va suivre n'est qu'une paraphrase de celle d'Archimède.



2.

ARCHIMEDIS DE SPAERA ET CYLINDRO.

Propositio XIII. Theor. 8.

Cylindri recti ſuperficies ſine base, aequalis eſt circulo cujus ſemidiameter media proportionalis inter latus et diametrum baſis cylindri. [3])

Sit Diameter baſis cylindri a, altitudo b, circumferentia baſis r, ergo quia ſemidiametri ad circumferentiam ſemper eadem proportio, erit circuli cujus ſemidiameter eſt media proportionalis inter a et b, circumferentia $\frac{2r\sqrt{ab}}{a}$, [4]) contentum ergo hoc circulo, aequale debet eſſe ſuperficiei cylindri ſive rectangulo rb: multiciplicetur itaque $\frac{2r\sqrt{ab}}{a}$ circumfer. [et] $\frac{1}{2}\sqrt{ab}$ ſemidiam. fit rb, ut oportebat. [5])

---

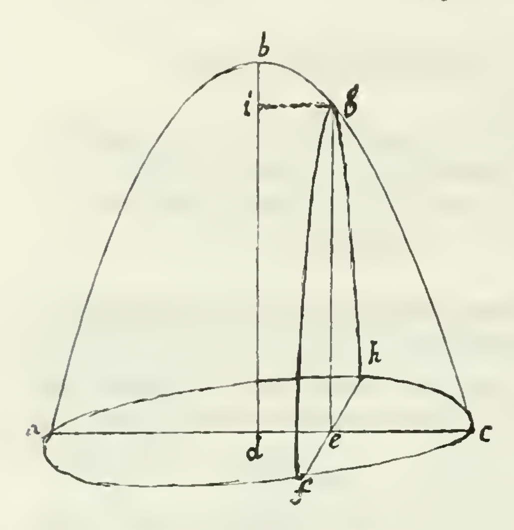
[3]) On retrouve la proposition à la page 61, T. I, de l'édition de Heiberg.

[4]) Pour justifier cette expression Huygens intercale encore la proportion: $\frac{1}{2}a : r = \sqrt{ab} : \frac{2r\sqrt{ab}}{a}$.

[5]) Suivent encore trois autres propositions d'Archimède, où les démonstrations géométriques d'Archimède ont été remplacées par des démonstrations très élémentaires, faciles à deviner, où l'algèbre est employée librement. Ce sont les prop. XIV (Heiberg. p. 69): „Omnis coni isoscelis superficies sine base, est aequalis circulo cujus semidiam. est media proportionalis inter latus coni et radium circuli qui coni basis est"; XV (Heiberg, p. 77): „Coni superf. habet eandem rationem ad circulum qui basis coni est, quam latus coni ad semidiam. basis coni; XVI (Heiberg, p. 77): „Si conus isosceles plano secetur basi parallelo, superficiei coni mediae inter plana parallela, aequalis est circulus, cujus radius medius proportionalis inter partem lateris coni comprehensum parallelis planis, et lineam aequalem radiis duorum circulorum qui habentur in planis parallelis."

3.

Si conoides parab. [6]) *feceter ut fectio fit parallela axi, five ad angulos rectos ad bafin, haec fectio erit parabola, quae idem latus rectum habebit quod tota parabola* abc. [7])



Sit conoid. *abc*, feceturque ex puncto *g* et fit fectio *fgh* dico hanc fectionem parabolam effe, quae idem latus rectum habet quod parabola *abc*. Sit enim *de* ∞ *p*, *ad*, *dc* ∞ *a*, parabola *abc* lat. rect. ∞ *r*.

Igitur ad inveftigandum quantum poffit quadratum *ef* five *eh*, fiat ut □ *cd* (*aa*) ad □ *de* five *ig* (*pp*) fic *db* $\left(\frac{aa}{r}\right)$ ad *ib* $\left(\frac{pp}{r}\right)$; ergo *di* five *ge* ∞ $\frac{aa-pp}{r}$; quae multiplicata per latus rect. *r* fit $aa-pp$ ∞ *ae*(∞$a+p$)mult. *ec* (∞$a-p$) ∞ □ *fe*.

[6]) Huygens ajoute encore la définition: „Conoides est solidum corpus quod fit si parabolae rectae, sive hyperbolae, dimidium circa axem verti concipiatur. Veluti si dimidium parabolae *abcd* circa axem *bd* circumvolvatur."

[7]) C'est la première des Propositions XI de l'ouvrage d'Archimède „De Conoidibus et Sphaeroidibus" (Heiberg, T. I, p. 341). Elle y est donnée sans démonstration; Archimède ajoute seulement: „harum autem omnium rerum demonstrationes manifestae sunt."

X.[1]

[1646].

Theorema. 1.[2])

Si ſint quotlibet numeri vel lineae in proportione geometrica, numero qui oritur ex diviſione primae per ſecundam, multata unitate, et ſic multiplicata cum ſumma omnium, exceptâ primâ, additoque ad hoc productum ultima; quod orietur erit ipſa prima proportionalium.

Sint numeri proportionales $a.\ b.\ \frac{bb}{a}.\ \frac{b^3}{aa}.$ diviſâ primâ per ſecundam oritur $\frac{a}{b}$.

$$\begin{array}{c}
\left.\begin{array}{c} b + \frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} \\ \frac{a}{b} - 1 \end{array}\right\} \text{m.} \\
\hline
- b - \frac{bb}{a} - \frac{b^3}{aa} \\
a + b + \frac{bb}{a} \\
\hline
\text{sum. } \left.\begin{array}{r} a - \frac{b^3}{aa} \\ \frac{b^3}{aa} \end{array}\right\} \text{ultimus add.} \\
\hline
a \infty a \text{ primus.}
\end{array}$$

[1]) Dans la première partie de cette pièce, jusqu'au „Problema" Huygens se propose évidemment de démontrer bien rigoureusement la formule pour la somme d'une suite géométrique à nombre infini de termes. Dans la seconde partie se trouvent des applications de cette formule.

[2]) La numération est de Huygens.

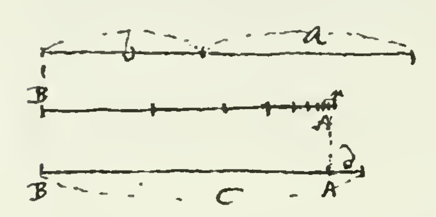
2.

Consequitur hinc denominatorem proportionis demptâ unitate, habere eam proportionem ad unitatem, quam habet prima proportionalium ad ſummam reliquarum una cum ultima per denominatorem [3]) diviſâ, et permutando.

3.

Sequitur quoque quamcunque proportionalium diviſam per denominatorem proportionis multatum unitate, aequalem eſſe descendentibus omnibus in infinitum proportionalibus.

Sint enim proportionales a et b; et b divisa per $\frac{a}{b}-1$, ſit c; ſi ergo reliquae proportionales in eadem proportione a ad b ſint inaequales lineae c, erunt majores vel minores, ſit ergo primum c major proportionalibus, et ſit differentia d; inveniatur igitur proportionalis quâ divisa per $\frac{a}{b}-1$. fiat r' [4]) minor differentia d, ergo haec una cum omnibus proportionalibus à b deorſum usque ad ipſam aequalis erit c, ex ante demonſtratis. [5]) ſit autem haec ſumma Br [6]), ergo utriusque ablatâ AB;[7]) deberet pars r' [4]), quae extra AB eſt aequalis eſſe d, tota autem r' [4]) minor eſt d. [8])



[3]) Intercalez: „demptâ unitate"; alors on obtient la proportion correcte:

$$\left(\frac{a}{b}-1\right):1=a:\left[\left(b+\frac{bb}{a}+\frac{b^3}{aa}\right)+\frac{\frac{b^3}{aa}}{\frac{a}{b}-1}\right].$$

[4]) Le texte a r, que nous avons remplacé par r' pour éviter un double emploi de cette lettre.

[5]) Soit, en effet, p le „proportionalis" en question. On a alors par le 1er théorème: $\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{bb}{a}+\frac{b^3}{aa}+\dots+p\right)+p=b$, donc: (divisant par $\left(\frac{a}{b}-1\right)$) $\frac{bb}{a}+\frac{b^3}{aa}+\dots+p+r'=c$

[6]) Voir la figure.

[7]) AB représente la somme des „proportionels" $\frac{bb}{a}$, $\frac{b^3}{aa}$ etc. jusqu'à l'infini.

[8]) Huygens supprime, évidemment comme superflue, la réduction à l'absurde du „secundum" c'est-à-dire, de la supposition: „c minor proportionalibus."

Problema.

Data linea a *et alia* b, *invenire tertiam lineam, ut* b *et ipſa, cum omnibus proportionalibus, quae ſunt in continua proportione in infinitum ut* b *ad ipſam, ſimul aequales ſint lineae* a *datae.*

Sit linea quaeſita ∞ x. Ergo denominator proportionis erit $\frac{b}{x}$. Quia itaque pono x etiam pro ultima, (omnes enim reliquae una cum ultima diviſa $\frac{b}{x} - 1$ ſemper aequales ſunt ſibi invicem, quamobrem non refert quot proportionales conſtituas,) debet ideo

$$b + x + \frac{xx}{b-x}\ ^{9)}\ \infty\ a$$

$$bb + bx + xx - bx - xx \infty ab - ax$$

$$ax \infty ab - bb$$

$$x \infty \frac{ab - bb}{a}.\ ^{10)}$$

---

9) Ce terme représente la somme des „proportionels" qui viennent après l'x. Il a été obtenu, comme une annotation à part l'indique, au moyen de la formule: $x : \left(\frac{b}{x} - 1\right)$ qui résulte du 3me théorème.

10) Suit la construction et encore deux autres problèmes que voici, qui sont résolus de la même façon:

„Data linea a, invenire lineam aliam, ita ut omnes continuae proportionales, in proportione quam habet a ad ipsam, una cum ipsa, proportionem habeant ad a, quam habet a ad ipsam." (Huygens trouve: „$x \infty \sqrt{\frac{5}{4}aa} - \frac{1}{2}a$. Id est si a secetur media et ultima proportione major pars erit ∞ x")

„Datis duabus lineis a et b invenire partem quam occupaturae sunt caeterae omnes proportionales continuatae in eadem proportione in infinitum." (Huygens trouve facilement: $b : \left(\frac{a}{b} - 1\right) \infty \frac{bb}{a-b}$).

Après cela on lit encore:

„Consequentia ex antedictis haec sunt.

1. Differentiam inter primam et secundam proportionalium esse ad primam, ut secunda ad omnes proportionales, excepta prima.

2. Denominatorem proportionis dempta unitate habere eam proportionem ad unitatem, quam major proportionalium ad omnes reliquas; et permutatim.

Ut si sint proportionales in tripla proportione, erit maxima dupla reliquarum omnium."

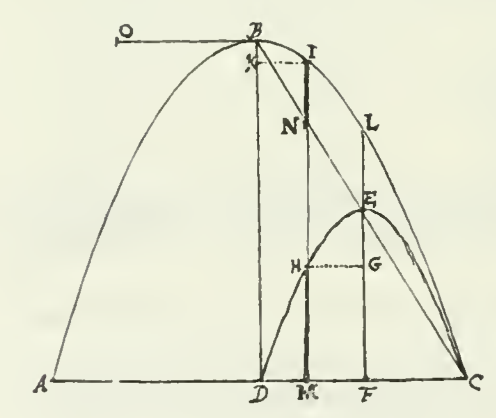
XI. [1]

[1646].

Quadratura Parabolae.

Communis notio.

Quod minus eſt quavis quantitate non eſt quantitas, ſed ipſum nihil.



Theorema. 1.

Si Parabolae ABC inſcribatur ſupra dimidium baſis ipſius ſimilis parabola DEC, id eſt cujus latus rectum ſit dimidium lateris recti BO parabolae ABC, et ex puncto I ubivis ſumpto ducatur parallela axi BD IM, ſecans parabolam DEC in H, et baſim in M; Dico HM duplum eſſe NI.

Sit enim DC ∞ a, DM ∞ b, lat. rectum B O ∞ r. BK autem eſt $\frac{bb}{r}$ ergo KD $\frac{aa-bb}{r}$

$$\left.\begin{array}{l}\text{CD } (a) \text{ ad BD } \left(\frac{aa}{r}\right) \text{ ut CM } (a-b) \text{ ad MN} \left(\frac{aa-ab}{r}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ex} \quad \text{KD} \left(\frac{aa-bb}{r}\right)\end{array}\right\} \text{ſubtr.}$$

$$\frac{ab-bb}{r} \text{ NI}$$

[1] La pièce contient une suite de théorèmes qui mènent à la quadrature de la parabole et à la cubature de divers solides de révolution engendrés par elle.

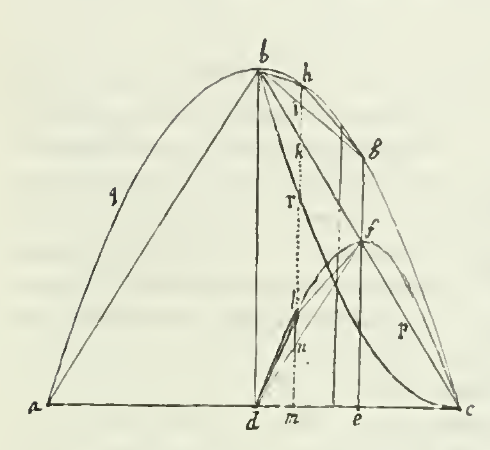
$$\text{MF} \quad \tfrac{1}{2} a - b$$

et quia lat. rect. parabolae DEC est ∞ $\frac{1}{2} r$ erit GE $\dfrac{\frac{1}{4} aa - ba + bb}{\frac{1}{2} r}$ | ſubtr.

$$\text{ex FE} \quad \frac{\frac{1}{2} aa}{r}$$

GF vel HM $\dfrac{ab - bb}{\frac{1}{2} r}$ quod ut oportebat eſt duplum NI.

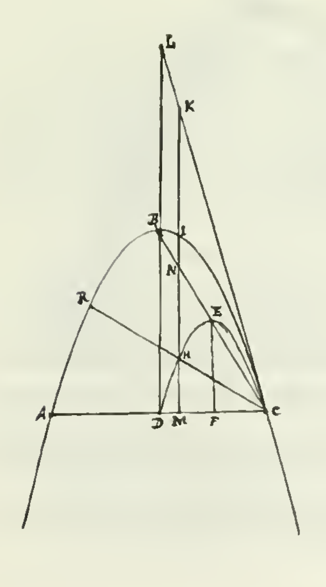
Vide demonſtrationem hujus in pagina ad ſiniſtram. [2])



THEOREMA 2.

In omni parabola ſi à vertice B ducatur recta ad extremum baſis C; tota parabola octupla eſt partis abſciſſae BHGCFK.

Quia enim *gf* eſt dimidia *fe* ex praecedenti theor. erit triangulum *def* duplum trianguli *fgb*: et rurſus quia *hk* dimidia eſt *lm*, et *ik* dimidia *nm*, et per id *ih* dimidia *ln*; erit triangulum *dlf* duplum trianguli *bhg*: Cum autem ſic in infinitum procedi poſſit, ſemper reliquis ſegmentis inſcribendo triangula, certum eſt totam portionem *dlfe* duplam eſſe portionis *bhgfk*, et quia haec dimidia eſt totius *bhgcfk* [3]),



[2]) Cette annotation a été ajoutée plus tard, à une date inconnue. Elle se rapporte à la démonstration plus géometrique qui suit et qu'on trouve à la page précédente du „boeckje".

„Demonstratio.

Quia parabolae ABC, DEC sunt similes; utcunque ex angulo C ducatur CR, semper à parabola DEC bifariam dividetur, ut hic in H. Linea autem LC tangit parabolam in C ergo KI aequalis IH, ut patet ex pr. 49. 2[di] Con. Apoll. si ergo dematur IN ex IH et addatur lineae KI, quae ante aequalis erat IH, excedet KN, NH duplo lineae IN: HM vero addita NH fit NM aequalis ipsi KN, ergo necessario HM fuit dupla IN. quod demonstrandum erat."

[3]) Puisque *ge* est le bisecteur des cordes parallèles à *bc*; ce qui permet de démontrer l'égalité des aires paraboliques *fghb* et *gfc* par des raisonnements analogues à ceux qui précèdent.

hanc totam aequalem esse dimidio parabolae *dfc*. parabola vero *dfc* (quia similis est parab. *abc*, et quia similes figurae sunt in duplicata ratione ut earum latera homologa) quarta pars est parabolae *abc*, ergo *bhgcfk* octava pars totius parabolae *abc*: et *bhgcfk* una cum *aqb* quarta pars parabolae; et triangulum *abc* tres quartae totius parabolae, et ideo tota parabola sesquitertia trianguli *abc* ut demonstravit Archimedes. [4])

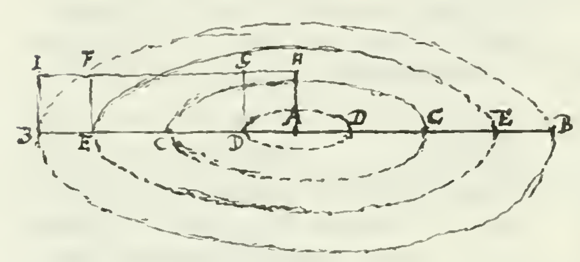
COROLLARIUM I. THEOREMATIS 2.^{di}

hk utrunque ducatur aequalis semper *kr*. [5]).

2.

hl aequalis *rm*.

THEOR. 3.



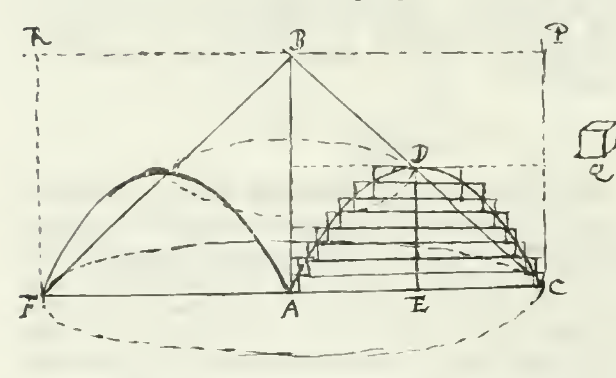
Sit centrum A, et linea AB, bifariam divisa in C, et CD aequalis CE: Dico quod si vertatur AB circa centrum A; spatium quod percurret linea AB, ad spatium quod percurret linea DE, proportionem habiturum, quam linea AB ad DE.

Sit AC, CB ∞ *a*.
DC, CE ∞ *b*.

$\square$ AE $aa + 2ab + bb$ ⎫ subt.
$\square$ AD $aa - 2ab + bb$ ⎭

$\square$ DE [6]) $4ab$ ad $4aa$ $\square$ AB ut $2b$ ad $2a$ sive DE ad AB.

Circuli autem proportionem habent quam quadrata.



COROLLAR. THEOR. 3.^{tii}

Id quod circumeundo fit corpus à rectangulo EG ad cylindrum cujus basis circulus BB, ut ED ad AB.

THEOR. 4.

Si parabola ADC vertatur circa axem AB donec in eundem locum redierit solidum corpus quod eo circuitu faciet, eam

[4]) Voir la Prop. XXIV de la „Quadratura parabolae" d'Archimède, p. 349 du T. II de l'édition de Heiberg citée dans la note 2 de la pièce IX.

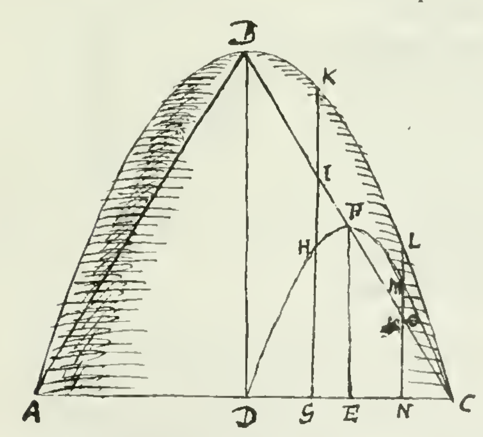
[5]) Ici *brc* représente une parabole dont le sommet se trouve à *c* et dont l'axe est parallèle à *bd*.

[6]) Au lieu de $\square$ DE lisez: l'aire comprise entre les carrés construits sur AD et sur AE.

proportionem habebit ad cylindrum FRPC qui basim et altitudinem duplam habet, quam parabola ADC ad rectangulum AP; quamobrem etiam aequalem erit cono FBC.

Si negetur aequale esse, cono FBC sive tertiae parti cylindri FP, corpus factum ex circumvolutione parabolae ADC sit differentia cubus Q; et sit primo minus cono: Inscribantur ergo et conscribantur parabolae parallelogramma aequalis altitudinis, ut inscripta à conscriptis ablata, rectangula quaedam relinquant, quae una cum parabola circumversa, omnia simul nimus solidum efficiant quam cubus Q. Quia itaque ex praecedenti 3°. theor. patet singulas bases parallelog.um circumversas spatia circularia describere quae sunt ad FC circulum, ut bases eorum ad radium AC; sequitur quoque omnia simul solida circularia quae dicta parallelogramma efficient circumcurrendo, proportionem habitura ad cylindrum FP, quam ipsa parallelogramma omnia ad Parallelogrammum AP. ergo figura constans ex parallelogrammis circumscriptis (quia major est ipsa parabola, sive tertia parte rectanguli AP) circumversa efficiet solidum quod majus erit tertiâ parte cylindri FP, sive majus cono FBC, cui aequale erat solidum ex parabola una cum cubo Q; Sed quia parvula relicta rectangula, omnia simul circumversa minus solidum efficiunt quam est cubus Q, sequitur si horum solida subtrahantur à solido ex conscriptis parall.s, remansura solida ex inscriptis parall.s quae simul majora erunt ipso solido parabolae, quo tamen continentur, quod est absurdum: ergo solidum quod efficit circumvoluta parabola non est minus cono FBC.

Sit jam parabolae solidum majus cono FBC, ergo detracto cubo Q aequale erit cono. Sed omnia simul solida ex parvulis rectangulis minora sunt cubo Q, parte vero horum (id est quae intra parabolam continetur) à parabola detractâ, relinquuntur solida ex inscriptis parall.is, quae minora simul sunt cono, et parabolae solidum detracto cubo Q aequale debebat esse cono, quod est absurdum.

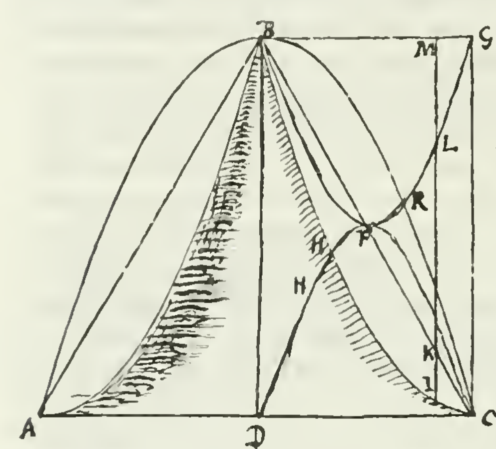


THEOR. 5.[7]) *Conoides parabolicum sesquialterum est coni, qui eandem basin et altitudinem habet.*

Sit conoides ABC, conus basis et altitudinis ejusdem ABC; dico conoides sesquialterum esse coni.

[7]) Ce théorème est mentionné par Huygens dans sa lettre N°.11 (p. 18 du T. I) du 3 septembre 1646 à son frére Constantyn, après quoi il ajoute: „Cecij a este demonstre d'Archimede mais d'une autre demonstration que la miene". On retrouve en effet le théorème en question dans la proposition XXI (Heiberg, T. I. p. 387) de l'ouvrage „De Conoidibus et Sphaeroidibus".

Quia enim per prop. 1. GH est dupla KI, MN dupla OL et sic de caeteris, erit solidum in circumvolutione factum circa axem BD à parabola DFC duplum solidi à parte BKLCIB [8]). Solidum autem à parabola per antecedentem aequale est cono ABC, ergo conus, ejusdem partis BKLCIB circumversae duplus erit. Ergo totum conoides ad inscriptum ut 3 ad 2, id est sesquialterum coni.



THEOR. 6. [9])

Corpus quod fit circumvolutione partis BHCD dimidium est coni eandum basin et altitudinem habentis.

Quia IK dimidia est LM per 1.mam pr. et sic de ceteris omnibus, solidum quod fit circumversione totius partis BFKCHB etiam dimidium solidi a parabola BFG, hoc vero aequale est cono ABC; ergo et praedictae partis solidum dimidium coni ABC, et solidum à parte BHCDB etiam dimidium coni, quia simul conum componunt.

COROLLARIUM 1.

Item corpus ex circumvolutione figurae BKCHB aequale est cono ABC.

COROLLARIUM 2.

Conoides convexum ABRC ad concavum ABHC ut 3 ad 1.

---

8) C'est bien l'influence qui se fait sentir ici, de la méthode de Cavalieri, dont van Schooten était l'un des promoteurs. Voir, à ce propos, les Lettres N° 85, N° 85*a*, N°. 86 et N° 87 (p. 130, 561, 132 et 133 du T. I).

9) Ce théorème, comme le précédent, est mentionné dans la lettre du 3 sept. 1646; mais avec la remarque: „ce que je ne pense pas qu'il avoit esté demontré cijdevant."

XII. [1]

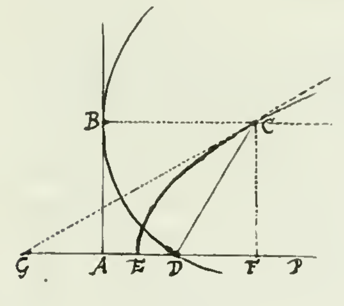
[1646].

De Tactionibus. [2]

Probl. 1.

Linea AB et punctum D sunt datae: Oportet circulum describere qui tangat lineam et transeat per punctum.

Ex puncto D ducatur DA perpend. AB, dividatur DA bifariam in E, describaturque parabola EC, cujus latus rectum sit quadruplum ED et vertex sit E, axis EP: dico quodcunque punctum in hac sumptum esse centrum quaesiti circuli.



Sumatur punctum C in dicta parabola ex quo, radio CD describatur circulus DB dico hunc tangere lineam AB; Demonstrandum ergo est CB perpend. super AB aequalem esse CD. Fiat itaque GD aequalis DC et erit GC contingens in C [3]), unde si demittatur perpend. CF erit FE aequalis GE, et GD aequalis AF, quia AE est aequalis ED; itaque cum FA sit aequalis DG, erit etiam BC aequalis CD quod erat demonstrandum.

---

[1]) Cette pièce traite les coniques considérées comme lieux géométriques du centre d'un cercle passant par un point donné et touchant à une droite ou à un cercle donné,

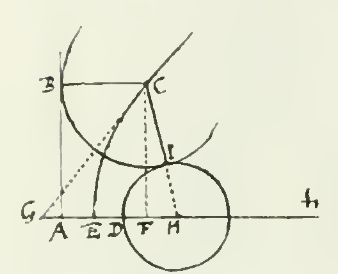
[2]) Ce titre, sans doute, fait allusion à celui d'un des ouvrages perdus d'Apollonius, décrits par Pappus dans l'Introduction au Livre septième des „Mathematicae collectiones," (voir, à la page 159 recto, l'ouvrage cité dans la note 3 de la Lettre N°. 538, p. 259 du T. II). Toutefois chez Apollonius il s'agissait de la construction des cercles déterminés par *trois* conditions d'attouchement et ici il s'agit des lieux géométriques des centres des cercles satisfaisant à deux de ces conditions.

[3]) Voir le § 8 de la Pièce N°. IV (p. 33).

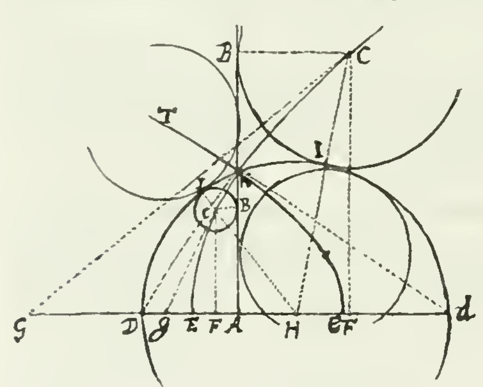
PROBL. 2.

Data sunt linea AB et circulus HDI, oportet circulum describere qui utrumque contingat.

Vertice E in media AD, axi EH, quartâ parte lateris recti EH parabola describatur EC; et ubivis in ea punctum sumatur, ut C dico id esse centrum quaesiti circuli. Oportet igitur demonstrare perpendicularem CB super BA aequalem esse CI. Ponatur GH aequalis HC et erit GC contingens parabolam in C, unde demissa perp. CF erit et FE aequalis EG, additisque hinc ED illi AE erit AF sive BC aequalis GD, haec vero aequalis est CI, quod erat dem.



Secet autem nunc data linea AB datum circulum HDI. Dividatur AD bifariam in E; hinc axi EF, $\frac{1}{4}$ lateris recti EH, parabola describatur E*c*C; dico omnia puncta hujus parabolae esse centra quaesiti circuli.



Primum autem probabo lineam AB et circulum datum et parabolam sic descriptam in eodem puncto ut hic in K sese secare.

DE est $\frac{1}{2}$ DA, DH est $\frac{1}{2}$ D*d*, itaque et EH est $\frac{1}{2}$ A*d*, et rectangulum sub DA, A*d* duplum rectanguli sub DA, EH. Quia autem EH est $\frac{1}{4}$ lateris recti, duplum rectanguli sub DA, EH est aequale quadrato AK, ergo ut K sit et in parabola et in circulo, debet esse rectangulum DA*d* (hoc enim et quadrato AK aequale est) duplum rectanguli sub DA, EH, atqui sic esse demonstratum est, ergo etc.

Sumatur nunc in parabola punctum ubicunque ut C, describaturque circulus CBI, dico illum et lineam et circulum tangere, sive BC aequalem esse CI.

Ponatur enim HG aequalis HC et quia tunc ducta GC parabolam contingit in C, demissâ perpendiculari CF, erit GE aequalis EF, et si ab aequalibus aequalia detrahantur manebit DG aequalis AF sive BC; GD autem etiam aequalis est CI, quia antea HG, HC erant aequales, Ergo et BC aequalis est CI; quod erat demonstrandum. Sic quoque demonstrari potest de parabola *e*KT, quae non minus huic rei inservit quam EKC.

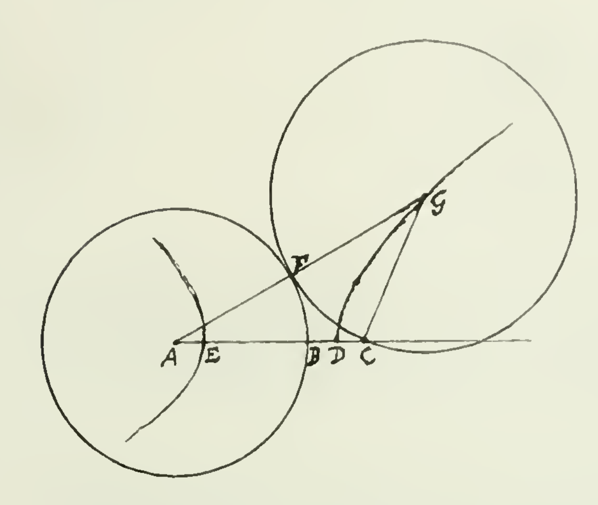
Notandum est duas hasce parabolas in K invicem ad angulos rectos secare, quia

nimirum contingentes earum DK, *a*K sese in eodem puncto K ad angulos rectos secant; contingunt autem quia DE, EA sunt aequales.

Probl. 3.

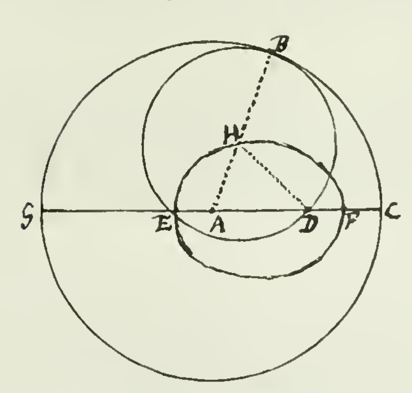
Sit datus circulus ABF et punctum C; oportet describere circulum qui circulum datum contingat et per datum punctum transeat.

Ducatur AC, et dividatur BC bifariam in D; describatur porro hyperbola foco C, vertice D, axi ED, qui aequalis sit AB; dico quodcunque sumatur in ea punctum, esse centrum quaesiti circuli.



Sumatur in ea punctum G ducaturque circulus per punctum C datum, probandum est illum contingere quoque circulum ABF: sive ducta GA, GF aequalem GC. Excessus AG supra GC aequalis est axi hijperbolae ED, per 51, 3tii Apol. [4]) AB sive AF aequalis est axi ED ex constructione; ergo si ab AG auferatur AF, remanet FG aequalis GC quod erat demonstrandum.

Si datum punctum D sit intra circulum datum ACB, ducatur recta per punctum D et centrum dati circuli quae sit CG, et focis, circuli dati centro A, punctoque dato D, diametro maximâ EF, aequali radio circuli dati AC, describatur ellipsis EHF. dico quodvis punctum in ipsius circumferentia sumptum esse centrum quaesiti circuli; ut si sumatur punctum H et semidiametro HD describatur circulus HBD, dico hunc tangere quoque circulum datum ACB, sive ducta e centro AB, HB, HD aequales esse.



Ex constructione EF aequalis est AC; sed AH una cum HD quoque aequalis est EF, per 52 tertij Apoll. [4]) ergo et AH cum HD aequalis est AC vel AB, et detracta communi AH, manet BH aequalis HD, quod erat demonstrandum.

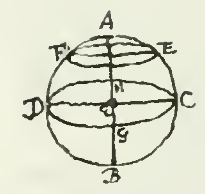
[4]) Voir p. 98 recto de l'édition de Commandin, citée dans la Pièce N°. 5, note 4 (p. 6 du T. I).

XIII.[1])

[1646].

Gnomonica.

Sol ſingulis viginti quatuor horis ſemel circa axem ſuum vertitur. Sit axis circa quem vertitur AB, et ſol in C motum incipiat, per HDG ut iterum redeat in C; dico hunc circulum eum perficere viginti quatuor horis: et idem quoque erit ſi in circulo EF ex E moveri incipiat donec eodem redeat.



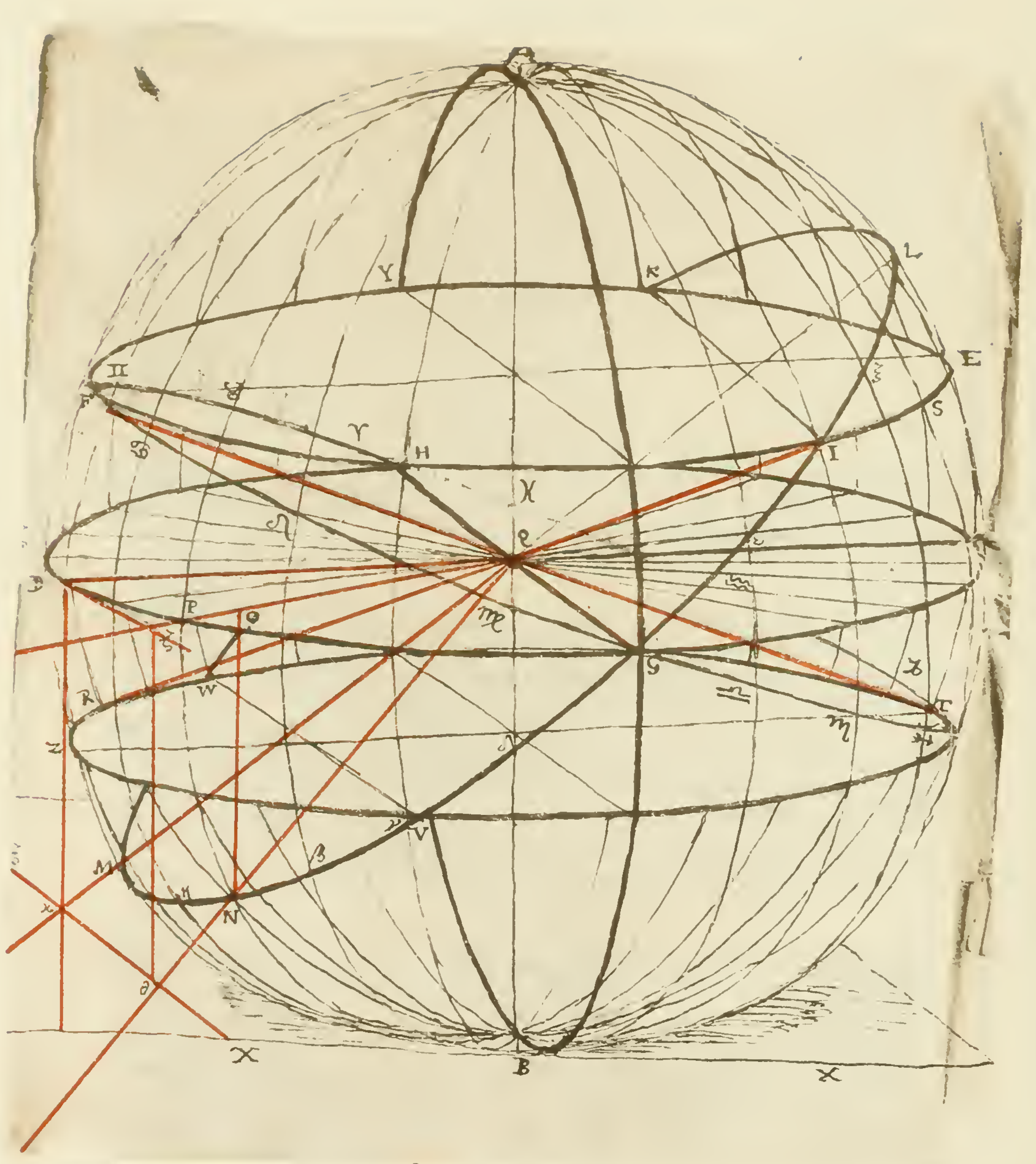
Terra autem ad hos circulos non eſt niſi mininum punctum quod in centro Q totius globi conſiſtit; et iterum reſpectu hominum tam magna ut ubicunque ſuper ipſam conſiſtant (quia ſuperficies ipſius plana apparet) non poſſint unquam niſi dimidium magnae ſpaerae in qua ſol et ſtellae ſunt videre.

Sol autem non manet ſemper in circulo DHCG[2]) ſed ad A et ad B accedit, non recedendo tamen plus 23 gradibus 30 min. à D in utramque partem; ita ut angulus totus RQF ſit 47 grad. Circuli autem FKEH, et RWGTV, ad quos cum pervenit revertitur, tropici vocantur: Inter hos tropicos circulus eſt, cujus diameter ab F ad T tendit per centrum mundi Q, et ſecat circulum DHCG ſecun-

---

[1]) Dans le petit traité qui va suivre, Huygens nous semble avoir voulu montrer combien la science de la gnonomique est simple et facile à expliquer dans un petit nombre de pages. En effet, dans une lettre à Mersenne du 24 novembre 1646, reproduite p. 550—553 de notre Tome II, Huygens, père, raconte comment son fils Christiaan s'est moqué „de la grimace de ces gens, qui font esclatter peu de matiere par des grands appareils de tailles douces et autres embellissemens" et il cite en exemple „le grand volume de Kircherus" [voir la note 1 de la lettre N°. 240, p. 357 du T. I] „ou ceste miserable Gnomonique tant traictée et retraictée par ces gens là" [les Jésuites] „occupe seule les $\frac{2}{3}$ de son livre."

[2]) Voir la planche où toutefois la lettre C, qui se trouve tout à droite, n'est presque pas visible.


Y
K
L
E
S
F
H
I
P
Q
W
R
Z
G
T
M
N
V
X
B
X

dum rectam HQG: hic autem in duodecim partes aequales dividitur quarum unaquaeque uni ex 12 ſignis tribuitur.

Sequitur hinc eos qui ſub circulo DGCH id eſt ſub aequatore habitant et axes mundi A et B ideo in eodem cum horizonte plano vident, habere ſemper aequinoctium; omnes autem terrae incolas cum sol eſt in circulo DGCH seu aequatore.

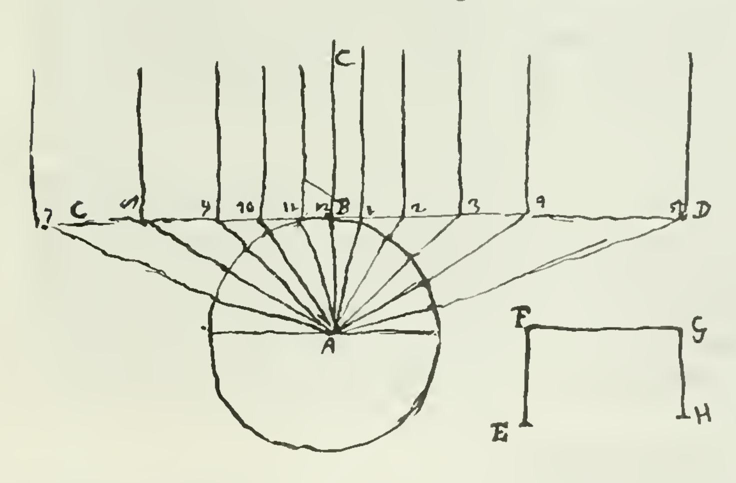
Sit nunc horizon noſter circulus KLIGVNMW cujus diameter ML, ſitque angulus AQL 52 graduum circiter quae eſt noſtra poli elevatio, videbimus itaque cum ſol eſt ad tropic. capricorni breviſſimum nobis diem fore, quia tantum nobis ſol appariturus eſt dum eſt in parte circuli WRZV; longiſſimum vero cum eſt ad trop. cancri, apparebit enim per totam circuli partem HHFK. etc.

Si itaque in plano aliquo horologium ſciotericum facere velimus oportet imaginari illud per centrum mundi tranſire, et ſtijlum idem eſſe quod axem mundi.

1. Sit igitur primo conſtruendum horologium in plano quod ſecet axem mundi ad angulos rectos, ut DHCGP; hic nihil aliud faciendum requeritur quam ut circulus arbitrariae magnitudinis qui locum obtinebit circuli DHCGP, dividatur in viginti quatuor aequales partes, ſtylusque ad perpendiculum ex centro erigatur, hocque facto ut ſtylus ponatur parallelus axi mundi ita ſuprema ipſius pars polum reſpiciat: et praeterea ut linea horae ſextae ſit parallela horizonti. Caetera facilia ſunt facile enim eſt horas inſcribere poſtquam linea ipſarum inventae ſunt. [3])

---

2. Nunc ſit inſcribendum horologium plano AYVBG. Circulo ergo in 24 partes aequales diviſo, ducatur contingens CD et ubi rectae ex centro per aequales diviſiones circuli, lineam CD ſecant, erigantur perpendiculares, haeque erunt lineae horariae. Stylus vero FG aequidiſtans erit ponendus plano horologii, ſupra EF, GH quae utraque debet eſſe aequalis



[3]) Huygens ajoute encore en marge: „N. B. Horologium hoc valet ab aequinoctio ad aequinoctium."

AB. Hoc horologium conſtituendum eſt ſicuti in ſphaera circulus AYVBG, nempe ut CD ſit ſupra lineam quae ducitur ab oriente in occidentem CB autem elevanda ad poli altitudinem, ut parallela ſit axi mundi. Valet hoc ab hora ſexta matitutina ad ſextam veſpertinam.

---

3. Idem horologium mutatis tantum numeris horarum ita ut pro 12 ponatur 6; pro 1, 7; pro 2, 8; pro 11, 5; conſtitui poteſt ut CB parallela maneat axi, C tendat ad polum; planum autem habeat perpendiculare horizonti; Valebitque ab ortu ſolis ad meridiem.

---

4. Sit nunc faciendum horologium horizontale, ad altitudinem 52 grad. ſive (facto angulo AQL 52 grad.) in plano KLIGVNMW: [4]) Hic nihil aliud inveniendum eſt quam ubi circuli horarum praedictum planum ſecent ut hic in MηNβνδGεlξ etc. hunc circulum ita diviſum, in plano exhibere oportet: hoc facile fiet ſi conſideretur primo omnes 24 circulos horarios ad planum XX[5]) perpendiculares eſſe, et ideo ſi a ſectionibus P et N, quas idem circulus horarius PNB facit in diverſis planis (horizontali ut LM et aequinoctiali ut DC), ad centrum Q lineae ducantur ut NQ, PQ, has fore perpendiculariter unam ſupra alteram ſitas, ita ut ON perpendicularis quoque ſit ad planum XX; deinde vero planum concipiatur ζζθζ [6]) quod contingat ſphaeram in puncto D, et ſic perpendiculare ſit ad planum XX, cui inſiſtit ſecundum lineam ξθ; punctum enim ζ̵ ubi productus radius QP illud planum ſecat perpendiculariter ſitum eſt ſupra punctum θ, ubi radius QN productus idem planum ſecat ita ut ζ̵θ perpendicularis ſit ad planum XX: Concluditur enim hinc radios ductos a centro Q per ηNβν etc., lineam ξθ diviſuros, in eiſdem diſtantiis ut radii plani DC, lineam ζζ̵. Conſtructio ergo horologii ſic expedietur. fiat primo circulus ABDC[7]) qui repreſentabit circulum DGC, et ſimiliter dividatur in 24 aequales partes, porro ducatur GH contingens in D, quae repreſentat lineum ζζ̵. fiat jam angulus DAE aequalis complimento poli altitudinis, nempe 38 grad. et AE repreſentabit lineam Qκ; ut et DF quae aequalis ſumenda eſt AE. IF vero aequali ſumpta AD, referet DI lineam Mκ et FI, QM; et lineae ductae ad F a punctis DORPH etc. lineas horarias: puncta S,T, puncta I K. Manente autem centro A poteſt circulus BDC confici arbitrariae magnitudinis ita ut ſecet lineam GH: et FD tantummodo aequali ſumpta AE nihil opus eſt circa F circulum ullum deſcribere. Stylus ſupra F punctum figendus eſt; et ſupra lineam FD circa D attollendus ad poli altitudinem, ut hic 52 grad. Aliter

---

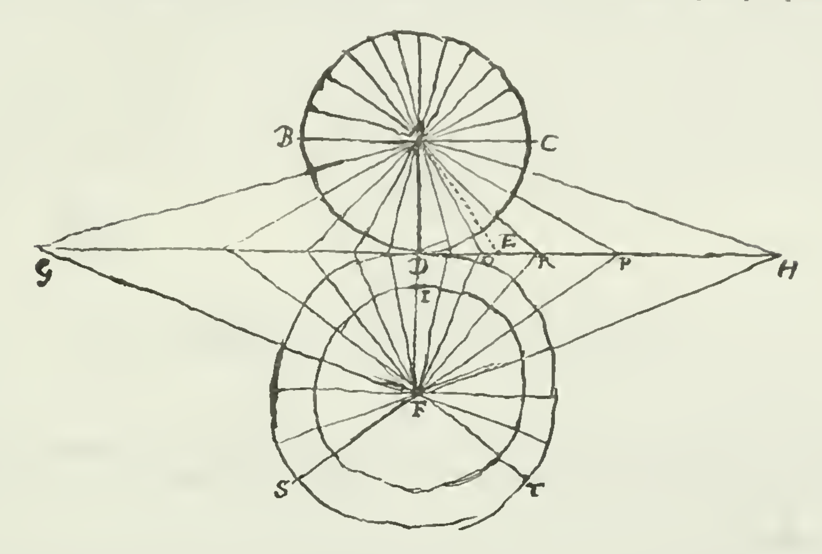
[4]) Voir la planche vis à vis de la page précédente.

[5]) Voir les lettres X. X au bas de la planche.

[6]) Lisez ζζ̵θξ.

[7]) Voir la figure de la page suivante.

tamen etiam ſtijlus conſtitui poteſt, ubicunque in linea DF ipſum erigendo perpendiculariter ad planum horologii, ut tamen altitudo ipſius ſemper proportionem



habeat ad diſtantiam quâ abeſt ab F, quam habet AD ad DE, et tunc extremitas ipſius horas monſtrabit. [8])

5. Horologium perpendiculare horizonti, et ponendum ſupra lineam ab oriente in occidente, non differt à praecedenti niſi quod angulus DAE debeat eſſe aequalis elevationi poli nempe hic 52 graduum, et ideo AE, et DF longiores; et quod ſtylus debeat elevari ad complimentum altitudinis poli; horum cauſae ex figura magna ſatis perſpicuae ſunt.

[8]) Huygens ajoute en marge: „hoc in omnibus horologiis obtinet.”

XIV.[1)]

[1646].

De motu naturaliter accelerato.

I.[2)]

Joan. Caramuel Lobcowitz [3)] de hac materia ſcribens, [4)] ſublimium ingeniorum crucem vocat; damnatisque ſententiis aliorum, inter quas et Galilei, quae

---

[1)] De cette pièce, qui traite les lois de la chute des corps graves et que nous avons divisée en deux parties, la première partie à été écrite avant le 3 septembre 1646; comme cela résulte de la Lettre N°. 11 (p. 18 du T. I). Elle a été inspirée par la lecture d'un ouvrage de Caramuel Lobkowitz, que nous citerons plus loin. Dans cet ouvrage Lobkowitz, sur la foi des expériences qu'il a faites, répudie la loi de la chute des graves, telle que nous l'admettons maintenant pour la chute dans le vide, et la remplace par une autre de sa propre invention. Or, dans le principe: que les rapports supposés des espaces parcourus, dès le commencement de la chute, dans des intervalles de temps d'égale durée, doivent, si la loi proposée est possible, rester invariables quand on change cette durée; dans ce principe le jeune Huygens a trouvé le moyen de montrer que la loi promulguée par Lobkowitz est en contradiction avec soi-même. Ensuite il applique le même principe à quelques autres suppositions, parmi lesquelles la supposition que les rapports mentionnés constituent une série arithmétique le conduit à la loi bien connue d'après laquelle les espaces parcourus successivement sont dans la proportion des nombres impairs 1, 3, 5 etc.

Huygens, lorsqu'il conçut cette première partie de la pièce présente, n'avait pas encore pris connaissance des écrits de Galilée. Plus tard, après le 28 octobre 1646, date de la Lettre N°. 14 (T. I p. 24), les „Discorsi" lui sont parvenus, et c'est la lecture de cet ouvrage qui a donné lieu à la seconde partie, où Huygens examine la démonstration donnée par Galilée de la proposition, d'après laquelle dans un même milieu tous les corps de même matière tombent nécessairement avec la même vitesse.

Remarquons que les deux parties de la pièce nous font connaitre les idées du jeune Huygens sur l'action du milieu résistant dans la chute des graves.

[2)] La division est de nous.

[3)] Voir, sur Juan Caramuel Lobkowitz la note 6 de la Lettre N°. 360ᵃ (p. 562 du T. I).

[4)] Il s'agit de son ouvrage: „Sublimium ingeniorum crux. Jam tandem aliquando deposita a Joanne Caramuel Lobkowits, Gravium lapsum cum tempore elapso componente, concordiamque experimentis & demonstrationibus Geometricis firmante." Lovanii, Apud Petrum van der Heyden, M.DC.XLIV, 27 p, 4°.

tamen ſubtiliſſima eſt et Mathematicis quodammodo principiis innititur, ſuam veram aſſerit, quae nullo tamen fundamento ſuperſtructa eſt, ſed tantum experientiae, [5]) quam ut ſaepe, et hic deceptricem fuiſſe puto. Nemo autem ſatis abſtractè motum conſideravit, dum conſiderat motum lapidis aut ſphaerae metallicae per aerem ex alto cadentis; maximè enim cum experientia conveniret ſententia Galilaei niſi aeris reſiſtentia id impediret. Sic ergo motum acceleratum melius conſiderabimus. Supponatur valde aequalis et laevis ſuperficies alicujus plani AB, iique impoſita



ſphaera A, ſeorſim relictâ omni gravitate et reſiſtentia aeris; ventus praeterea ſupponatur aequaliter ſpirare à parte Q ad partem B; Sphaera igitur promota à vento hoc, uſque in C, etiam ſi ventus tunc ſubito ceſſaret, nihilominus eadem celeritate, quam in C habet pergeret moveri ſecundum lineam AB, percurreretque temporibus aequalibus ſpatia aequalia CD, DB; ſed quum ventus ſemper aequali impetu ipſi inſtare ſupponatur, ſemper adhuc addit ipſi aliquid celeritatis, alioqui enim tantundem efficeret quieſcens quam ſpirans. Minori ergo tempore percurret ſpatium CD quam ſpatium AC, et minori adhuc ſpatium DB quam CD, et ſic porro in infinitum diminuentur tempora quibus aequalia ſpatia percurret. Cum ergo in aequalia ſpatia inaequalia tempora impendat, manifeſtum etiam eſt aequalibus temporibus inaequalia ſpatia percurſurum; ſic si unâ horâ percurrat AC, altera hora plus percurret ſpatio CD, et ſic porro.

P V S M R T

Totius autem operis ſcopus eſt, nimirum ut ſciatur, ſi pondus aliquod unâ aliquâ temporis quantitate ex alto decidens tranſeat per certum aliquod ſpatium menſurae, per quot ejuſmodi menſurae ſpatia tranſiturum ſit ſequenti temporis quantitate ſi motus continuetur: ut ſi pondus P primo momento lapſus ſui ex P tranſeat ſpatium PS, quantum ſpatium tranſiturum ſit ſecundo momento, quantum 3tio, et ſic deinceps. Comparo autem attractionem quâ centrum terrae omnia gravia attrahit ad ſe, (ut hic pondus P verſus T), vento, quem ſpirantem à parte Q ſuppoſui promovere ſphaeram A verſus B; ut autem illic omnia impedimenta ſepoſui, ſic et hic aerem illiusque impediendi vim ſepono. Hoc autem concedi poſtulo; [6])

[5]) A la page 4 de l'ouvrage de Lobkowitz on trouve les résultats d'expériences faites à Louvain, à Gand et à Malines, se rapportant à des chutes de 3, 9, 30, 130, 164 et 300 pieds. Dans la suite de son ouvrage l'auteur, à l'aide de ces resultats, éprouve les lois proposées par divers physiciens.

[6]) A commencer par cette phrase on retrouve, en français, ce qui va suivre (jusqu'au début de la seconde partie de la pièce) pour la plus grande part et parfois presque textuellement dans la lettre à Mersenne du 28 octobre 1646 (N°. 14, p. 25—27 du T. I).

nempe ſi pondus P primo momento lapſus tranſeat ſpatium PS, ſecundo autem momento ſpatium SR; idem vero pondus P etiam dimidio momento primo, tranſeat ſpatium PV, ſecundo autem dimidio momento ſpatium VM; fore ut PV proportionem habeat ad VM, quam PS ad SR. Hoc conceſſo ſequitur primò, Spatium quod aliquot momentis pondus e loco quietis cadens tranſiit, proportionem habere ad ſpatium quod totidem inſequentibus momentis tranſiit, quam ſpatium quod primo momento tranſiit ad ſpatium quod tranſiit ſecundo momento.

Tranſierit pondus D primo momento ſpatium DV, ſecundo VN, tertio NB, quarto BZ; dico DN eſſe ad NZ ut DV ad VN. Quia enim duobus primis tranſiit ſpatium DN, et duobus ſecundis ſpatium NZ; uno autem primo tranſiit DV, et uno ſecundo tranſiit VN, apparet ex antecedenti poſtulato DN eſſe ad NZ ut DV ad VN quod erat demonſtrandum. Probabo nunc Spatia quae pondus cadens è quiete, aequalibus temporibus praeterlabitur non eſſe in proportione Geometrica. [7])

Pondus N primo momento tranſeat ſpatium NO, ſecundo OP, tertio PQ, quarto QR; dico ut NO eſt ad OP, ſic non eſſe OP ad PQ, nec PQ ad QR. Sit enim NO ∞ a, OP ∞ b, ergo deberet PQ eſſe $\frac{bb}{a}$, QR $\frac{b^3}{aa}$, debet autem ex praecedenti propoſitione PR eſſe ad PN ut PO ad ON, hic vero additis PQ, QR fit PR $\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa}$ hoc ergo ad NP $a + b$, debet habere proportionem quam OP ad NO, id eſt b ad a. Itaque et rectangulum ex extremis aequale rectangulo ex mediis. Quia vero patet ex analyſi[9]) b eſſe aequalem a, deberet ſecundo momento non plus ſpatii peregiſſe quam primo, quod ut ante dictum eſt eſſe non poteſt, non ergo cadet in ulla proportione geometrica. Sed animi cauſa fingamus decidere in aliquo geometrico proceſſu nempe ut primo momento tranſierit ſpatium NO, 1, ſecundo momento duplum

$$\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa} \text{ — } a + b \text{ — } b \text{ — } a\ ^{8)}$$

$$\frac{a}{\quad} \qquad \frac{b}{\quad}$$

$$bb + \frac{b^3}{a} \propto ab + bb$$

$$b^3 \propto aab$$

$$bb \propto aa$$

$$b \propto a$$

[7]) C'est l'„opinio tertia" attribuée par Lobkowitz à quelques physiciens à la page 10 de son ouvrage.

[8]) C'est-à-dire: $\left(\frac{bb}{a} + \frac{b^3}{aa}\right) : (a+b) = b \quad a.$

[9]) Voir le calcul à côté.

ſpatii NO ut OP, 2, tertio PQ, 4, duplum ipſius OP, quarto QR, 8, duplum ipſius QP, ſpatium ergo PR quod tertio et quarto momento tranſiit eſt 12, ſed ſi primo tranſiit NO, 1, ſecundo OP, 2, duobus autem primis NP, 3; ergo et duobus ſecundis PR, 6, debuit tranſiiſſe; ſed et ſpatium PR fuit 12 ergo idem eſſent 12 et 6 quod eſt abſurdum.

Quia itaque non poteſt eſſe ulla geometrica proportio, perquiramus proceſſus arithmeticos, et primo momento tranſierit NO ∞ a, ſecundo OP ∞ $a + xa$, tertio PQ $a + 2xa$, quarto QR $a + 3xa$; oportet ergo PQ + QR eſſe ad NO + OP, ut OP ad NO. Patet ex hac analyſi [10]) NO eſſe a, OP eſſe $3a$ (quod idem eſt

$$\begin{array}{l}
\text{add.}\left|\begin{array}{l} a + 2\,ax \\ a + 3\,ax \end{array}\right. \qquad \begin{array}{l} a \\ a + ax \end{array} \\
\hline
2a + 5ax \text{ --- } 2a + ax \text{ --- } a + ax \text{ --- } a \\
\qquad\quad a \qquad\qquad a + ax \\
\hline
2aa + 5aax \,\infty\, 2aa + 3aax + aaxx \\
\hline
2aax \,\infty\, aaxx \\
\hline
2 \,\infty\, x
\end{array}$$

quod $a + xa$, cum x ſit 2) PQ eſſe $5a$, et QR $7a$; nullumque proceſſum arithmeticum praeter hunc reperiri qui locum habere poſſit; [11]) Caram. Lobkowitz tamen hunc repudiat, [12]) ſuumque qui falſiſſimus eſt reponit; [13]) ait enim NO eſſe 1, OP 2, PQ 3, QR 4 et ſic porro; ſed conemur demonſtrare quam maniſeſtè Audax mathematicus [14]) ſibi ipſi contradicat. Ponatur vera eſſe ipſius ſen-

[10]) Voir le calcul qui suit.

[11]) Dans sa lettre à Mersenne Huygens ajoute encore: „Et je ne trouve point d'autres progressions qui ayent quelque regularité, et la propriété requise que cellecy. Et pour cela je croij qu'il n'y a point d'ordre du tout, ou que c'est celuy de ces nombres impairs."

„Tout cecy doit estre considere comme en une place ou il n'y a point d'empeschement d'air ny d'autre chose mais seulement une uniforme attraction d'en bas, soit grande ou petite."

Remarquons cependant que le principe posé par Huygens ne conduit nullement avec nécessité à cette loi des nombres impairs. Ainsi la suite 1, 7, 19, 37, ... $(3n^2 - 3n + 1)$, ... déduite de la loi $s = at^3$, ou celle déduite de la loi plus générale $s = at^p$, satisfont au même principe.

[12]) Voir la page 14 de son ouvrage, où l'on lit: „Pulchra quidem haec sententia est, non tamen per omnia experimentis correspondens. Unde ut sentio proximè ipsa veritatem accedit, non tamen pertingit exactè. Sed qualiscum ipsa, illustrabitur Tabellà subsequenti." Après quoi Lobkowitz fait suivre un tableau où les espaces calculés d'après la loi en question sont comparés avec les espaces observés.

[13]) Voir les pages 17—20 de l'ouvrage cité.

[14]) Allusion au titre de l'ouvrage suivant: „Mathesis audax rationalem, naturalem, supernaturalem, divinamque sapientiam arithmeticis, geometricis, catoptricis, staticis, dioptricis, astronomicis, musicis, chronicis, et architectonicis, fundamentis substruens exponensque authore Joanne Caramuel Lobkowitz. Opus verè novum & varium, in gratiam magnarum mentium scriptum. Lovanii. Apud Andream Bouvet. M.DC.XLIV. 200 p. 4°.

tentia et primo ſcrupulo pondus T praeterlabatur ſpatium TD, 1; ſecundo ſcrupulo DP, 2; tertio PC, 3; quarto CW, 4, ergo PC + CW quae praeterlabitur tertio et quarto ſcrupulo una erunt 7; ſed ſit nunc primum temporis ſpatium duo ſcrupuli, his duobus ergo praeterlabetur ſpatium TP, 3, et alteris duobus tertio nempe et quarto juxta ipſius ſententiam duplum tantum nempe 6, ſed tertio et quarto ſcrupulo praeterlabebatur PW 7, ergo 7 et 6 deberent eſſe aequalia, quod abſurdum eſt. Reſtat nunc ut meam pari modo examinem, (quanquam analyſis aeque certa ſit ac demonſtratio,) poſtea vero indicem quare et quomodo erravit Lobkowitz.

Dixi autem aequalibus temporibus pondus A praeterlabi ſpatia AB 1, BC 3, CD 5, DE 7, et ſic porro, ut ſemper duplum primi ſpatii accreſcat: ſingulis autem ſcrupulis ſingula haec ſpatia tranſierit; ponantur autem nunc duo ſcrupuli pro primo tempore; ergo ſi duobus his primis ſcrupulis tranſierit AC 4, debet alteris duobus inſequentibus tranſire ter tantum, id eſt 12, ſecundum meam hypotheſin; ſed et CD + DE ſunt 12 ergo conveniunt ut oportebat, habetque EC proportionem ad CA quam CB ad BA; ſic quoque GD 27 ad DA 9 quam CB ad BA.

Lobkowitz in errorem incidit quia non conſideravit reſiſtentiam aeris, quam alio exemplo declarare conabor. Nemo eſt qui non viderit navem, quam primum vela attracta ſunt ſenſim incipere promoveri, principio quidem valde lente post aliquod tempus vero ſatis velociter prout ventus aſpirarit, tamen cum jam ad certam velocitatem pervenit, eâdem illam deinceps pergere; quod ſi ſemper ejus velocitas augeretur (ponamus tantum ſecundum ordinem Lobkowitz) tunc ſi primo horae quadrante quartam partem milliaris provecta eſſet, poſt ſex horas quibus eodem vento uſa eſſet conficiſſet milliaria 75, ſed experientia longe contrarium docet, cum videamus navem non multum poſt quam ſolvit eodem deinceps tenore ferri.

Eodem modo ſe res habet in iis quae deorſum per aerem moventur; quamobrem quia et haec ſimiliter tandem ad punctum aliquod perveniunt unde deinceps aequaliter pergunt moveri manifeſtum eſt celeritatem non accrescere eo ordine quo voluit Lobkowitz, ſed variè prout media per quae decidunt minus vel magis reſiſtunt; Concludo igitur nihil certi de cadentibus per aerem affirmari poſſe, niſi ex experimentis petatur.

II.

Probare inſtitueram, projecta pondera ſurſum vel in latus, parabolam deſcribere, ſed interea temporis in manus incidit libellus Galilei de motu accelerato

naturaliter et violento; [15]) quem cum videam haec [16]) et plura alia jam demonſtraſſe, nolui Iliada poſt Homerum ſcribere. Galilaeus in eodem libello Dialogo primo credit ſe probaſſe [17]) gravia ejuſdem materiae per idem medium aequali velocitate ferri; non aſſentior; ſed audiamus ejus rationes: Si gravia duo, inquit, unum altero citius moventur, manifeſtum eſt, ſi jungamus tardius velociori, motum velocioris ex parte retardatum, tardioris vero ex parte acceleratum iri: At ſi hoc ita ſe habet, et porro verum eſt lapidem magnum moveri ex. gr. cum octo gradibus velicitatis, et minorem cum quatuor, ergo conjungendo eos, compoſitum ex iis movebitur cum paucioribus gradibus velocitatis quam octo: ſed duo lapides ſimul majorem conſtituunt lapidem, eo qui movebatur cum octo gradibus velocitatis, ergo hic major tardius movetur, minori, quod eſt contra hypotheſin. hactenus ille.

Contrarium ergo probabo prius, poſt autem indicabo quare non procedat ipſius demonſtratio. Sic itaque demonſtro Gravia ſimilia, ejusdem materiae, ſive quorum magnitudines proportionem habent quam gravitates inter ſeſe, quanto majora ſunt tanto citius deſcendere per medium reſiſtens, ſi ſimilia ſint figurâ.

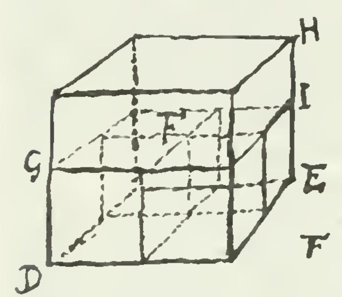
Pono planum AB medio in aere expers gravitatis et ſoliditatis horizonti parallelum; ſi ergo illud certa quadam velocitate deprimi velim, opus habebo certo aliquo pondere quod ei appendam; ſit hoc C cui aer nihil reſiſtere concipiatur; (ſi ergo minus ponderis appendam quam eſt C non tam cito deprimetur ob aeris reſiſtentiam); pono praeterea quatuor ejuſmodi plana quale AB prope invicem ſita, ſingulisque appenſum pondus quale C; haec ergo, quia in deſcenſu contigua manerent et ſingula aeque cito ac planum AB deſcenderent, compoſita intelligantur efficere planum DE, cui pro quatuor ponderibus unum appendatur F

[15]) Voir l'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 17 (p. 31 du T. I). Et ajoutons à propos de cette communication de Huygens une remarque qui regarde la pièce N°. VI. „De Catena pendente." D'après l'avant-dernier alinéa de la Lettre N°. 14 (p. 28 du T. I) cette dernière pièce fut conçue à peu près au même temps que la première partie de la pièce présente; c'est-à-dire avant que Huygens eut pris connaissance de l'ouvrage cité de Galilée. Il est donc clair que ce n'est pas dans l'assertion de Galilée (qu'une corde pendue fait la parabole) que l'on y rencontre dans la „Giornata seconda" et dans la „Giornata quarta" (aux pp. 186 et 309—310 du T. VIII de l'édition nationale des „Opere di Galileo Galilei." Firenze, 1898) que l'on doit chercher l'origine de la pièce N°. VI; mais plutô dans celle de Girard, de la même portée, mentionnée dans la note 2 de cette pièce N°. VI.

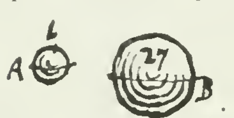
[16]) Voir le Theorema I, Propositio I de la „Giornata quarta," p. 269—279. T. VIII de l'édition de Favaro.

[17]) Voir les pp. 107—110, T. VIII de l'édition de Favaro.

quod aequivaleat omnibus quatuor: Itaque planum DE appenſo pondere F aequali velocitate deprimetur ac planum AB appenſo pondere C. Jam plano AB cubus ſuperimpoſitus intelligatur, qui aequalis ſit gravitate ponderi C, ab hoc ergo planum AB aeque cito deprimetur ac a pondere C appenſo; et ſimiliter planum DE a parallelepipedo DI quod conſtat ex quatuor talibus cubis, aeque cito deprimetur ac a pondere F appenſo ergo cubus AB aeque velociter deſcendet ac parallelep.m DI: ſed cubus DH conſtat ex duobus talibus parallelepipedis, quorum alterum GH, inferiori DI incumbit, et cum nullam reſiſtentiam patiatur ab aere, idem efficit ac ſi plano DE bis pondus F appenſum eſſet; ergo quia bis pondus F citius deprimit planum DE quam idem ſemel ſumptum manifeſtum quoque eſt cubum DH velocius deſcenſurum cubo AB, quod probandum erat. Breviter autem ſic ratio reddi poteſt, nimirum quia pondera cadunt aequali velocitate ſi nullum medium reſiſtat, medium autem reſiſtit ſecundum ſuperficiem; ſimilium vero corporum ſolidum ad ſolidum in triplâ, ſuperficies ad ſuperficiem in duplâ proportione eſt laterum horum.



Sint ſphaerae ejuſdem materiae A 1 et B 27, dico B citius deſcenſuram A. Aer cuique ſphaerae ſecundum inferiorem dimidiam ſuperficiem reſiſtit, vel quod idem eſt ſecundum maximum in ea circulum; quia vero maximus circulus ſphaerae B, 9 circulis ſphaerae A aequalis eſt, proculdubio ſi novem talibus ponderibus maximus circulus B deprimeretur quali uno deprimitur circulus A, aequali celeritate deſcenderent; ſed circulus B 27 talibus deprimitur, quali A uno; itaque sphaera B quoque velocius deſcendet ſphaera A. Et hic quidem cauſa eſt quare granulum arenae non tanta velocitate deſcendat quam ſaxum: quam Galilaeus procedere ait a ſcabroſitate. [18]) Ratio autem ejuſmodi Galilei quam modo audivimus dupliciter intelligi poteſt, quia duobus modis pondera componi poſſunt; Sit enim ex. gr. pondus A minus multo pondere B ejuſdem materiae, quod ideo per aerem lentius descendet quoque pondere B; manifeſtum eſt ſi jungantur fune CD, motum ponderis B partim retardatum, ponderis A vero partim acceleratum iri, quia aer utrique ſuperficiei reſiſtit: At ſi componantur in unam ſphaeram, tunc pondus A longe plus gravitatis addet ponderi B, quam ſuperficiei, et ideo compoſitum citius movebitur ſolâ ſphaerâ B.



[18]) Comparez, au lieu cité dans la note précédente, les lignes 28—30 de la p. 109, où Galilée attribue l'effet en question à l'influence „delle figure come de i minimi momenti, le quali cose grande alterazione ricevono dal mezzo."

Corollarium.

Sequitur ex paulo ante demonſtratis duo ſimilia corpora fieri poſſe ſed inaequalia magnitudine, ex diverſa materia, quae tamen per medium reſiſtens aequali velocitate descendant. [19])

---

[19]) Nous faisons suivre encore ici une annotation au crayon, écrite de la main juvénile de Huygens sur une des dernières pages du „boeckje."

„De retardatione aeris

De sphaerae motu in tubo gyrato
et spirali quam describit;
de diversis tubi elevationibus.

quod gravia cadentia ad punctum
perveniant unde aequali
deinceps motu decidant.

quod projecta tandem non
describant parabolam.

De colligendis theorematis
ex ante demonstratis."

Cette annotation nous paraît constituer l'avant-projet d'un ouvrage de plus longue haleine où les considérations de la pièce présente auraient trouvé leurs places.

Plus tard Huygens a ajouté encore à l'encre „de motu pendulorum."

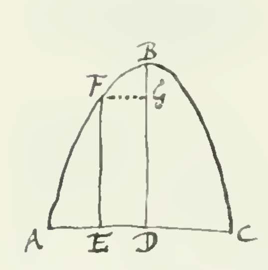
XV. [1])

[1646].

De Sphaera et Parabola.

Prop. 1.

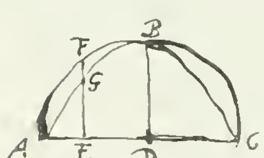
Si in parabola ABC ducatur utcunque parallela FE, axi BD, dico rectangulum ſub ſegmentis AE, EC aequale eſſe rectangulo ſub FE et latere recto parabolae [2])



Cum enim rectangulum ſub latere recto et BD aequale ſit quadrato AD, ſi utrinque auferatur rectangulum ſub latere recto et BG ſive quadratum FG ſive ED, remanebunt, hinc, rectangulum ſub lat. recto et FE, inde, rectangulum AEC, aequalia.

Hinc manifeſtum eſt BD eſſe ad FE ut rectangulum ADC ad rect. AEC.

Prop. 2.



Si ſit ſemicirculus ABC cui ſit inſcripta parabola ABC, et utcunque ducta FE perp. eſt ut BD ad GE longitudine ſic BD ad FE potentia.

BD namque eſt ad GE, ut rectangulum ADG. [3]) ſive quadratum BD ad rectangulum AEC ſive quadratum FE.

---

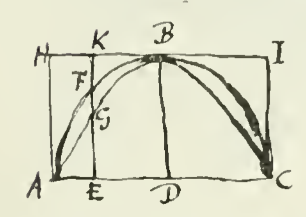
[1]) C'est ici la pièce indiquée dans la lettre N°. 23^b (p. 557 du T. II) à Mersenne du 23 déc. 1646 comme comprenant „Une autre démonstration de ce qui est contenu au livre d'Archimède, de sphaera et cylindro." Voir l'Avertissement à la p. 5 du volume présent.

[2]) Sur une des pages précédentes du „boeckje" on rencontre une démonstration „par lettres," c'est-à-dire algébrique, de la même proposition.

[3]) Lisez „ADC."

Prop. 3.

Si convertatur ſemicirculus ABC et ſemiquadratum AHIC dico sphaeram factam a ſemicirculo in converſione, eſſe ad cylindrum ex converſione ſemiquadrati AHIC, ut 2 ad 3. [4])

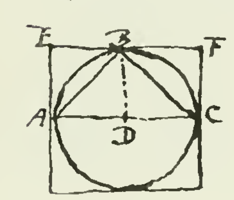


Cum enim ut prius utcunque ductâ perp. KE, quae etiam inſcriptam parabolam ſecat, ſit ut BD vel KE ad GE longitudine, ſic KE ad FE potentiâ, vel circulus ex converſione KE ad circulum ex converſione FE, erit ideo totus cylindrus ex converſione AHIC ad ſphaeram ex converſione ſemicirculi ABC, ut rectangulum AHIC ad parabolam AGBC [5]). id eſt ut 3 ad 2 ut patet ex quadratura parabolae. [6])

Prop. 4.

Superficies ſphaerae quadrupla eſt maximi in eâ circuli. [7])

Quia enim dimidia ſphaera ABC eſt ad cylindrum AEFC [8]) ut 2 ad 3 conſtat eam quoque duplam eſſe coni inſcripti ABC. Porro cum



conſtet ſphaeram aequalem eſſe cono altitudinis DB et qui baſin habeat ſuperficiei ejuſdem ſphaerae aequalem [9]), ſequitur quoque conum altitudinis DB qui aequalis ſit quartae parti ſphaerae, baſin habere quartae parti ſuperficiei ſphaerae aequalem: Atqui talis eſt conus ABC, ergo baſis ejus maximus in ſphaera circulus AC aequalis eſt quartae parti ſuperficiei sphaerae: quod erat demonſtrandum.

---

[4]) C'est la première partie du „Corollarium" de la Prop. XXXIV du premier Livre de l'ouvrage „De Sphaero et Cylindro" d'Archimède. Voir la p. 147 du T. I de l'édition de Heiberg mentionnée dans la note 2 de la pièce N°. IX (p. 50).

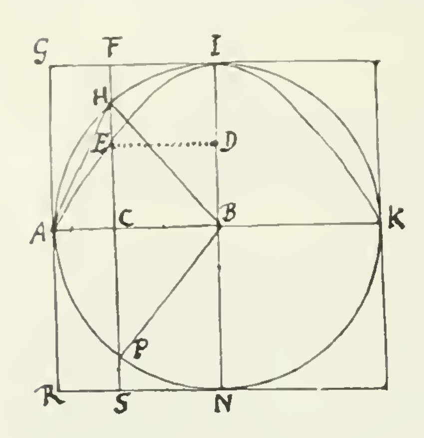
[5]) Ici encore on croit reconnaître l'influence de Cavalieri. Voir la note 8 de la pièce N°. XI (p. 60).

[6]) Comparez la pièce N°. XI (p. 56) où Huygens déduit la quadrature de la parabole par une voie nouvelle.

[7]) C'est la Prop. XXXIII de l'ouvrage mentionné d'Archimède. Voir Heiberg, T. I, p. 137.

[8]) Il s'agit du cylindre dont la base est le cercle décrit sur AC comme diamètre et dont BD est la hauteur.

[9]) Comparez chez Archimède la démonstration de la Prop. XXXIV (Heiberg I, p. 141).



Prop. 5.

Si parabolam ſecet parallela axi linea FS et ſimul ſphaeram NAHIK, erit ut rectangulum CG ad partem parabolae abciſſam AEC, ita cylindrus RF ad portionem sphaerae PAH.

Hoc manifeſtum ſatis eſt ex prop. 2. [10])

Prop. 6.

Datae portioni ſphaerae conum vel cylindrum aequalem invenire.

Sit data portio HAP: AK ∞ a, AC ∞ b. Quia autem conſtat ex praecedenti prop. partem abſciſſam ex parabola, AEC, eſſe ad rectang. CG ut portio ſphaerae HAP ad cylindrum RF quaeram primo valorem partis AEC.

$$\text{m.}\left|\begin{array}{ll} a - b & \text{CK} \\ b & \text{AC} \end{array}\right.$$

$$\text{d.}\left|\begin{array}{ll} ab - bb \;\square & \text{ACK} \\ \text{per } \tfrac{1}{2}a & \text{lat. rect.} \end{array}\right.$$

$$\text{s.}\left|\begin{array}{ll} \dfrac{2ab - 2bb}{a} & \text{EC per 1. prop.} \\ \text{ex } \tfrac{1}{2}a & \text{FC} \end{array}\right.$$

$$\text{m.}\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\tfrac{1}{2}aa - 2ab + 2bb}{a} & \text{EF} \\ \tfrac{1}{2}a - b & \text{ED} \end{array}\right.$$

$$\text{m.}\left|\begin{array}{ll} \dfrac{\tfrac{1}{4}a^3 - \tfrac{3}{2}aab + 3abb - 2b^3}{a} & \square\ \text{EI} \\ \tfrac{2}{3} \text{ per quadr. parabolae} & \end{array}\right.$$

---

[10]) C'est-à-dire en appliquant la méthode de démonstration de la proposition 3.

$$\text{ad.}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\frac{1}{2}a^3 - 3aab + 6abb - 4b^3}{3a} \ \text{EID} \\ \dfrac{+3aab - 9abb + 6b^3}{3a} \ \square\ \text{CD}\end{array}\right.$$

$$\text{sub.}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\frac{1}{2}a^3 - 3abb + 2b^3}{3a} \ \text{IECB} \\ \text{ex } \frac{1}{6}aa \ \text{AEIB}\end{array}\right.$$

$$\frac{abb - \frac{2}{3}b^3}{a} \ \text{AEC}$$

$$\begin{array}{lll}\square\ \text{AF} & \text{AEC} & \text{RF} \\ \frac{1}{2}ab \text{ —— } & \dfrac{abb - \frac{2}{3}b^3}{a} \text{ ———— } & aab\end{array}$$ [11]) / $2abb - \frac{4}{3}b^3$ AHCP

apparet hinc portionem ſphaerae AHCP aequalem eſſe cylindro cujus baſis circulus deſcriptus radio AC, altitudo vero AB — $\frac{1}{3}$ AC nam $4bb$ baſin m. per $\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b$ altitudinem fit $2abb - \frac{4}{3}b^3$ ut ante.

Si autem conum velimus reperire portioni huic aequalem, cujus baſis ſit eadem quae baſis portionis id eſt circulus HP: dividatur $2abb - \frac{4}{3}b^3$ AHCP per triplum circuli [12]) HP $\frac{4ab - 4bb}{3}$ fit altitudo coni quaeſita $\frac{\frac{3}{2}ab - bb}{a - b}$. Id eſt ut CK ad CKB [13]) ſic AC ad quaeſitam altitudinem. Haec eſt propos... Archim. [14])

Prop. 7.

Datae ſphaerae portionis ſuperficiei circulum aequalem invenire.

Data ſphaerae portio ſit AHCP.

---

[11]) Toutes les expressions algébriques qui suivent, pour autant qu'elles représentent des volumes ou des aires, ne sont que proportionelles à ces volumes et à ces aires, desquelles on trouve les valeurs véritables en multipliant les expressions en question par $\frac{1}{4}\pi$.

[12]) Lisez: „per $^1/_3$ circuli."

[13]) Lisez: CK + KB $= a - b + {}^1/_2 a$.

[14]) Voir en effet la Prop. II du Livre II „De Sphaera et Cylindro," p. 195, T. I de l'édition de Heiberg.

$$\text{ad.}\left\{\begin{array}{l} 2abb - \tfrac{4}{3}b^3 \text{ [15]) } \ominus \text{ AHCP} \\ \tfrac{2}{3}aab - 2abb + \tfrac{4}{3}b^3 \triangle \text{ HBP} \end{array}\right.$$

$$\overline{\tfrac{2}{3}aab \triangle \text{ BHAP}}$$

$$\begin{array}{llll} \ominus \text{ AIKN} & \triangle \text{ BHAP} & \text{superf. } \ominus. & \text{superf. } \ominus \text{ HAP} \\ \tfrac{2}{3}a^3 \text{ ——— } & \tfrac{2}{3}aab \text{ ———— } & & 4aa \,/\, 4ab \end{array}$$

Hinc liquet fuperficiem datae partis AHCP aequalem effe circulo cujus radius AH. Quae eft prop. . . Archimedis. [16])

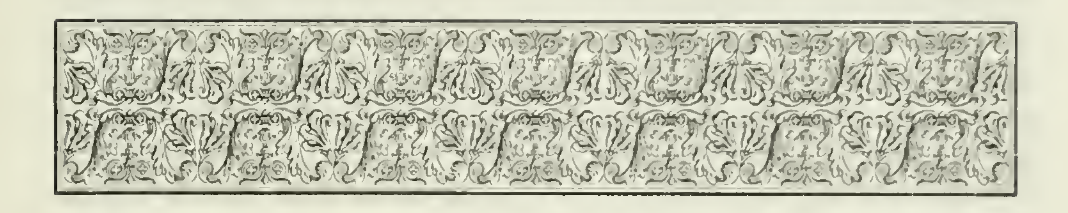
[15]) Voir toujours la note 11.

[16]) Voir la Prop. XLII du Livre I de l'ouvrage cité d'Archimède, p. 177, T. I, de l'édition de Heiberg.

DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBRI 3.

1650.



Avertissement.

Même après tant de siècles, le mathématicien, en pleine possession des méthodes modernes, ne prendra connaissance de l'ouvrage d'Archimède sur les corps flottants sans éprouver un sentiment d'admiration profonde, mêlé d'étonnement à cause des résultats obtenus, lesquels au premier abord lui ont dû sembler dépasser les moyens de recherche et même tomber en dehors de la préoccupation des anciens. On comprend donc aisément que la lecture de cet ouvrage ait fait une vive impression sur le jeune Huygens et l'ait excité à l'émulation. Et cela d'autant plus parce que, par des études dans cette direction, il se plaçait tout de suite sur un terrain particulièrement approprié à son génie, où il remporterait dans la suite tant de succès et qui doit avoir exercé aussitôt sur lui une grande attraction, savoir la physique mathématique.

Ce sont les résultats de ces études qui ont été réunis par Huygens dans le Traité qu'il intitula: „*De iis quae liquido supernatant Libri* 3."

Les sujets à examiner n'étaient pas difficiles à trouver. En premier lieu

Archimède s'était borné à la considération des segments sphériques et des conoïdes paraboliques; Huygens pouvait donc excercer ses forces sur d'autres figures géométriques simples. De plus il avait reconnu, en traitant l'équilibre de la chaîne, qu'un seul principe, celui d'après lequel le centre de gravité se place toujours aussi bas que possible, pouvait suffire à résoudre toutes les questions sur l'équilibre des corps sous l'influence de la gravité comme force motrice [1]). Il était donc tout indiqué de rattacher les résultats obtenus par Archimède à ce principe général.

C'est là en effet le but principal du *livre premier*. Dans les quatre premiers théorèmes Huygens déduit successivement du principe en question la situation horizontale du niveau des liquides, l'équilibre des corps flottants dont la densité est égale à celle du liquide, et enfin la loi célèbre d'Archimède appliquée au cas où la densité du corps est moindre que celle du liquide. De cette dernière déduction, plus compliquée que les autres, nous possédons même trois variantes reproduites dans le texte (p. 96—99), dans la note 14 du „liber 1" (p. 99—101), et dans l'Appendice I de ce traité.

Viennent ensuite (p. 102—104) trois nouveaux théorèmes généraux qui se démontrent par des raisonnements aussi simples qu'ingénieux et dont les deux derniers, les „Theoremata 6 et 7," vont servir de base aux recherches qui suivent, celles sur la stabilité de divers corps flottants homogènes dont l'axe de révolution est dans la situation verticale.

D'après ces théorèmes la stabilité exige que la différence de niveau du centre de gravité du corps flottant d'avec le centre de gravité de sa partie immergée (Theor. 6), ou, ce qui pour les corps homogènes revient au même, d'avec celui de la partie qui surnage (Theor. 7), soit un *minimum*.

Pour éprouver cette stabilité il suffit donc de couper le corps flottant par un plan variable α (qui représente les positions diverses du niveau du liquide) de manière que le volume des segments découpés soit égal à celui de la partie immergée (ou surnageante); de déterminer les centres de gravité de ces segments; de mener par ces centres de gravité un plan β parallèle au plan variable α correspondant, et de vérifier si pour toutes les positions voisines la distance du

[1]) Consultez les trois derniers alinéa's de la note 2 et la note 4 de la pièce N°. VI, appartenant aux „Travaux divers de Jeunesse", pp. 38, 39 et 40 du Tome présent.

centre de gravité du corps entier au plan β soit plus grande que pour la position initiale. [2])

C'est là la méthode suivie par Huygens pour retrouver (p. 105—113) les théorèmes d'Archimède sur la stabilité de l'équilibre d'un segment sphérique ou parabolique flottant avec l'axe de révolution dans une situation verticale et pour

[2]) Il nous semble utile d'indiquer la connection entre cette méthode de Huygens et une des méthodes modernes les plus fertiles, celle due à Dupin, qui consiste à déterminer le lieu géométrique σ des centres de gravité des portions d'égal volume découpées par un plan variable, et à abaisser ensuite, du centre de gravité F du corps flottant, des normales FS sur ce lieu géométrique. Alors chacune de ces normales représentera une position d'équilibre du corps flottant pour laquelle cette normale prendra la direction verticale. Et cet équilibre, dans le cas où la surface σ, au point S, se trouve être concave par rapport au point F, sera stable ou instable, selon que la normale en question est ou n'est pas un vrai minimum parmi les droites voisines tirées du point F aux points de la surface σ.

Or, pour déduire cette dernière méthode de celle de Huygens, on remarquera en premier lieu que, d'après un théorème bien connu qu'on doit à Bouguer, le plan β de Huygens n'est autre que le plan tangent de la surface σ (comparez les deux derniers alinéa's de la note 6 du „Liber II", p. 123 du présent volume). Mais alors le lieu du pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur ce plan β est la podaire π de la surface σ par rapport au point F comme pôle, et puisque, d'après le „Theorema 6" de Huygens cette perpendiculaire doit prendre une valeur minimale pour chaque position d'équilibre du corps flottant, on voit déjà qu'il suffira pour trouver ces positions, d'appliquer à la surface π la construction même que nous venons d'indiquer pour la surface σ.

Dès lors, pour reconnaître l'identité des résultats des deux méthodes on n'aura plus qu' à montrer (ce qui n'est pas difficile) que les normales menées du pôle F à la podaire π coïncident nécessairement avec celles menées du même point à la surface primitive σ, et à démontrer enfin comment la règle de Dupin pour la stabilité découle des „Theoremata 6 et 7" de Huygens.

Soient donc R_1 et R_2 les rayons de courbure principaux de la surface σ au point S et soit $FS = c$; alors l'analyse nous apprend que les rayons principaux de la surface π prendront au même point les valeurs: $R'_1 = \frac{c^2}{2c - R_1}$; $R'_2 = \frac{c^2}{2c - R_2}$. Mais si ξ, η, ζ représentent les coordonnées d'un point dans le voisinage du point S, par rapport aux tangentes principales et à la normale, qui sont, au point S, communes aux surfaces σ et π, alors on trouvera facilement, par une première approximation, pour la distance ϱ du point F à un point de la surface π,

$$\varrho^2 = c^2 + \left(1 - \frac{c}{R'_1}\right)\xi^2 + \left(1 - \frac{c}{R'_2}\right)\eta^2, \text{ ou bien } \varrho^2 = c^2 + \left(\frac{R_1}{c} - 1\right)\xi^2 + \left(\frac{R_2}{c} - 1\right)\eta^2.$$

Les theorèmes de Huygens cités exigent donc qu'on ait $R_1 > c$ et $R_2 > c$; mais alors FS est un vrai minimum pour la surface σ aussi bien que pour la surface π. Et on voit de même qu'une valeur négative de R_1 ou de R_2 entraîne nécessairement l'instabilité; ce qui veut dire qu'il y aura instabilité non seulement toutes les fois que FS n'est pas un vrai minimum mais aussi lorsque la surface σ, dont la courbure est toujours positive, tournera, au point S, sa convexité vers le point F.

déterminer (p. 113—117) les conditions de ſtabilité d'un cône droit, flottant dans la même ſituation, ſoit avec le ſommet en bas (Theor. 14), ſoit avec le ſommet en haut (Theor. 15).

En abordant le *ſecond livre*, qui traite l'équilibre des parallélipipèdes rectangles flottants, on éprouvera, nous le croyons, une certaine déception. Huygens, au lieu de pourſuivre l'application de la méthode générale qu'il vient de développer dans le livre premier, retourne, par le „Theorema 1" (p. 122) du „Liber II" à celle d'Archimède, qui conſiſte dans la conſidération du couple formé par l'action de la gravité ſur le corps flottant, repréſentée par une force appliquée au centre de gravité de ce corps, et par l'action de la preſſion vers le haut du liquide, repréſentée par une force appliquée au centre de gravité de la partie ſubmergée.

Il ſemble poſſible que cette incongruité a été introduite par la réviſion, ſur laquelle nous reviendrons, ſubie par le „Liber I." Alors cette réviſion ne s'eſt pas étendue aux autres livres, peut-être parce que la méthode que Huygens venait d'introduire dans le „Liber I", ſe montrait, dans les problèmes compliqués dont il s'occupe dans les „Libri II et III," moins maniable, qu'il ne l'avait prévu, et c'eſt probablement pour une raiſon ſemblable qu'il a laiſſé de côté dans le „Liber I" les beaux théorèmes d'Archimède ſur l'équilibre des conoïdes paraboliques flottants avec l'axe dans une ſituation inclinée.

Toutefois, même alors il y a lieu de s'étonner que Huygens n'a pas au moins rattaché ce „Theorema 1" du „Liber II" aux „Theoremata 6 et 7" (p. 103—104) du „Liber I" et cela d'autant plus que la démonſtration qu'il en donne et qui ne repoſe pas ſur les „Hypotheſes" formulées en tête du livre premier, n'a pas pu lui ſatisfaire entièrement. [3])

Quoiqu'il en ſoit, le „Liber II" nous apporte des recherches très profondes. Huygens évidemment a tâché d'obtenir une ſolution, auſſi complète, qu'il lui était poſſible, du problème du parallélipipède rectangle flottant, limité ſeulement dans ſa généralité par la ſuppoſition que la longueur du parallélipipède ſoit ſuffiſante pour aſſurer l'horizontalité des arêtes dans le ſens de cette longueur. [4])

---

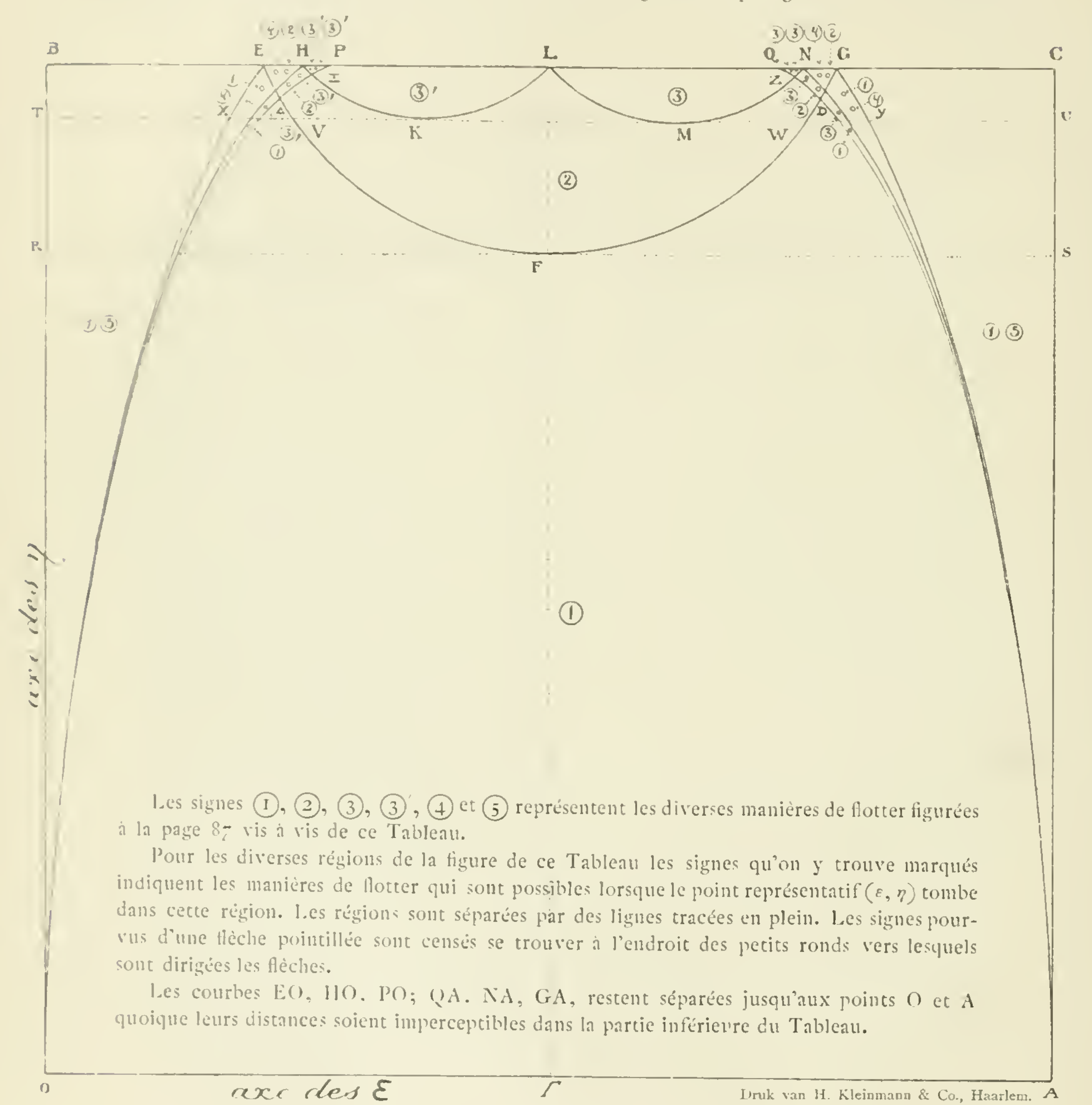
[3]) Comparez la note 6 du „Liber II," p. 122 du Tome préſent.

[4]) Voir les premières pages du „Liber II."

Tableau représentant la solution complète du problème du parallélipipède rectangle flottant avec les arêtes longitudinales dans la situation horizontale.

ε rapport de la densité du parallélipipède à celle du liquide.

η rapport du côté le plus petit de la section verticale rectangulaire au plus grand côté de cette section.



Druk van H. Kleinmann & Co., Haarlem.

Données principales.

$BE = GC = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211..$; $BH = NC = 0.25$; $BP = QC = \frac{9}{32} = 0{,}28125$

$BT = CU = 1 - \sqrt{\frac{8}{9}} = 0{,}05719..$; $BR = CS = 1 - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}1835..$

Equations des courbes du Tableau.

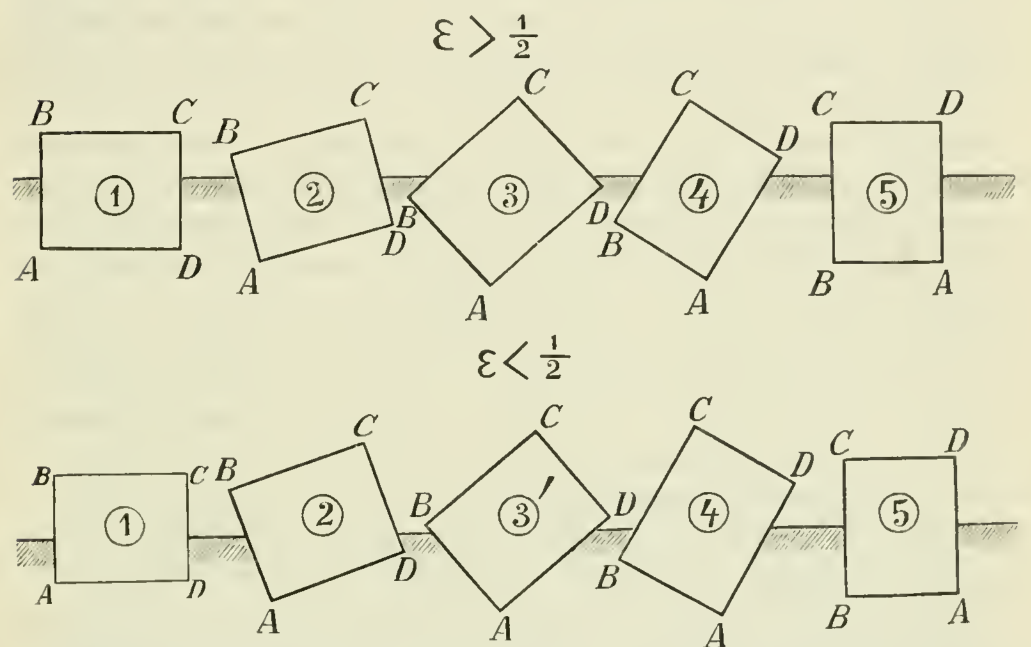
HKL : $2\eta^2\varepsilon(3 - 4\varepsilon) = 1$; LMN : $2\eta^2(1-\varepsilon)(4\varepsilon - 1) = 1$; EFG : $6\eta^2\varepsilon(1-\varepsilon) = 1$;

EO et GA : $6\varepsilon(1-\varepsilon) = \eta^2$; HO : $2\varepsilon(3 - 4\varepsilon) = \eta^2$; NA : $2(1-\varepsilon)(4\varepsilon - 1) = \eta^2$;

PO : $\varepsilon^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\left[(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}\right]\eta^{-\frac{1}{3}}$; QA : $(1-\varepsilon)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\left[(1+\eta)^{\frac{2}{3}} - (1-\eta)^{\frac{2}{3}}\right]\eta^{-\frac{1}{3}}$.

Pour faire juger plus facilement jusqu'à quel point ce but a été atteint par le jeune Huygens; nous avons conſtruit le tableau placé en regard de cette page, lequel contient, ſous la forme d'une repréſentation graphique, la ſolution du problème en queſtion. [5])

Pour expliquer ce tableau nous remarquerons en premier lieu que les ſignes ①, ②, ③ et ③′, ④ et ⑤ repréſentent dans leur ſuite naturelle les diverſes manières de flotter qui ſont poſſibles, en omettant toutefois les cas intermédiaires où l'un des ſommets de la ſection verticale du parallélipipède ſe trouve dans la ſurface du liquide.



Comme le montrent les figures que nous donnons ici, cette ſuite eſt un peu différente, mais ſeulement pour le troiſième cas, ſelon que l'on a $\varepsilon > \frac{1}{2}$, ou $\varepsilon < \frac{1}{2}$; ε repréſentant le rapport des denſités du parallélipipède et du liquide.

Soit, de plus, $\eta = \frac{b}{a}$ le rapport du côté le plus court b au côté le plus long a de la ſection verticale du parallélipipède, alors il eſt clair que les poſitions d'équilibre d'un parallélipipède flottant donné, de denſité donnée, ne dépendront que des

[5]) Nous en publierons ailleurs la discussion complète. Voir le Tome XII. (Série II) des Archives néerlandaises.

quantités ε et η. En conſidérant ces quantités comme des coordonnées rectangulaires, on peut donc repréſenter chaque parallélipipède par un point ſitué dans l'intérieur d'un carré OBCA dont les côtés ſont égaux à l'unité. Enſuite on peut diviſer ce carré de telle manière que la nature des poſitions diverses d'équilibre qu'un parallélipipède flottant peut prendre, ſoit indiquée par les chiffres ①, ②, etc. qu'on trouve marqués dans l'intérieur ou à côté de la diviſion[6]) où tombe le point représentatif.

C'eſt ce que nous avons fait dans notre tableau; là où l'on trouve deux chiffres, deux poſitions diverſes ſont poſſibles. Ces poſitions appartiennent alors d'ordinaire à des cas différents. C'eſt ſeulement dans les divisions peu étendues HΞP et QZN, marquées à côté ③ ③ et ③′ ③′, que les deux poſitions poſſibles appartiennent au même cas.

Pour chacun des „Theoremata" et „Concluſiones" de Huygens nous indiquerons dans les notes la portée à l'aide de ce tableau explicatif[7]). Il en réſultera que les lignes de démarcation EFG, EO, HO, NA, GA, HKL et LMN ont été parfaitement reconnues et définies par Huygens; mais qu'il n'en est pas de même pour les lignes PO et QA. Pour trouver ces lignes Huygens aurait dû diſcuter les poſitions ③ et ③′ auſſi complètement que les poſitions ② et ④.[8]) Il ne l'a pas fait et la raiſon en doit être cherchée probablement dans la plus grande difficulté de l'entrepriſe. Ainſi la détermination des conditions d'équilibre, qui pour ces dernières poſitions s'accomplit aiſément[9]), dépend pour les poſitions ③ et ③′ de la réſolution d'une équation biquadratique.[10])

[6]) Les lignes de démarcation des divisions ont été tracées en plein. Les lignes ponctuées ont un autre but et doivent être négligées ici.

[7]) Voir les notes 19, 23, 28, 33, 41, 42, 43, 51, 57, 67, 69, 70, 71, 74, 75, 79, 80, 82, 83, 84, 86, 87, 92, 93 et 94, p. 128—157, du „Liber II". Disons, pour résumer, que les possibilités de la position ① sont discutées complètement par les „Theoremata 2 et 3" (pp. 128, 129); celles de la position ② par le „Theorema 5" et la „Conclusio 3" du „Theor. 6" (pp. 134, 139); celles de la position ④ par la „Conclusio 2" du „Theor. 8" (p. 153); celles de la position ⑤ par la „Conclusio 1" du „Theor. 8" (p. 152). Les possibilités des positions ③ et ③′ sont traitées respectivement dans les „Conclusiones 4 et 5" du „Theor. 6" (pp. 142, 145); mais la discussion est incomplète en ce qu'elle ne comprend pas les positions correspondantes aux divisions ZNA et ΞHO du tableau. Enfin le „Theorema 7" (p. 145) traite le cas particulier où la section normale du parallélipipède est un carré et où par conséquent le point représentatif se trouve sur le côté BC du tableau.

[8]) Comparez les notes 92 et 93, pp. 156 et 157, du „Liber II".

[9]) Voir la note 34, p. 134, du „Liber II".

[10]) On peut s'en convaincre facilement en appliquant la méthode de Dupin décrite dans la note 2. Seulement, puisque les arêtes du parallélipipède dans le sens de la longueur sont censées

Le *troisième livre* traite l'équilibre du cylindre droit flottant. La solution que Huygens donne de ce problème est plus bornée que celle du problème analogue pour le parallélipipède. En effet, désignons les positions diverses du cylindre flottant par les mêmes signes ①, ②, ③, ④, ⑤, en supposant que l'axe du cylindre soit parallèle à la ligne AB des figures de la page 87, qui ont servi pour indiquer les positions diverses du parallélipipède; alors ce ne sont que les positions ① et ② qui ont été traitées par Huygens. Pour ces positions d'ailleurs sa solution est complète. [11])

Avant de pouvoir aborder le problème du cylindre flottant Huygens avait à déterminer le centre de gravité d'un tronc de cylindre droit. Cette besogne une fois accomplie au moyen des „Theoremata 1—4" (p. 159—162), les recherches pouvaient être menées par les mêmes voies que celles du „Liber II." Souvent même les théorèmes et les démonstrations ne présentent qu'une différence d'ordre numérique. Ainsi les „Lemmata 1—3" (p. 124—127) du „Liber II," qui constituent pour ainsi dire le fondement géométrique de ce qui va suivre, correspondent au „Lemma" et aux „Theoremata 5 et 6" (p. 163—166) du „Liber III." De même les „Theoremata 2, 3, 4, 5, 6" (p. 128 — 136) du „Liber II" correspondent respectivement aux „Theoremata 7, 8, 9, 10, 11" (p. 167—184) du „Liber III." Plus loin le parallélisme cesse d'être aussi complet, à cause d'une certaine différence dans la nature des résultats. [12])

---

demeurer dans leur position horizontale, les surfaces σ peuvent être remplacées par les courbes qui sont les lieux géométriques des centres de gravité de la partie submergée (ou de la partie surnageante) de la section verticale du parallélipipède; partie dont l'aire ne doit pas changer.

Or, pour les positions ② et ④ ce lieu est une parabole qui a pour axe l'un des diamètres de la section verticale rectangulaire. Pour trouver les positions d'équilibre on n'a donc qu'à mener les normales à cette parabole d'un point situé sur son axe; ce qui constitue un problème „plan". Pour les positions ③ et ③', tout au contraire, le lieu est une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes deux des côtés du rectangle et à laquelle il faut mener les normales partant d'un point situé arbitrairement par rapport aux axes de l'hyperbole. Comme on le sait, ce problème amène nécessairement une équation biquadratique, et, en effet, l'équation de la courbe QA du tableau (ou celle de la courbe PO) n'est autre chose que le discriminant de l'équation en question, égalé à zéro. Il est vrai que le cas particulier, où le rectangle devient un carré, y fait exception; mais cela ne semble pas avoir attiré l'attention du Huygens. Voir encore à propos de ce cas la note 79, p. 150, du „Liber II".

[11]) Voir, quant à la position ① les „Theoremata 7 et 8" (p. 167—168) et pour la position ②, le „Theorema 10" (p. 172) et les „Conclusiones 2" des „Theoremata 11 et 12" (pp. 174-186), dont les résultats ont été résumés dans la note 70 du „Liber III". Une représentation graphique de la solution de Huygens au moyen des coordonnées ε (densité relative) et $\zeta = \frac{h}{d}$ (h hauteur, d diamètre du cylindre) accompagne la note 37, p. 176, du même „Liber".

[12]) Ainsi le point L du tableau de cet avertissement et P de celui de la note 37, p. 176, du „Liber III"

Notons enfin que vers la conclusion du „Liber III,” p. 189, se trouve discutée la manière dont les résultats obtenus dans les recherches sur les corps flottants, pourraient être vérifiés expérimentalement.

Le manuscrit du traité „de iis quae liquido supernatant,” tel que nous le possédons, est écrit sur des feuilles de grand format, de quatre, ou quelquefois, de deux pages. Ces pages sont numérotées régulièrement de 1—16 pour le „Liber I”; de 23—48 pour le „Liber II”; de 49—75 pour le „Liber III”. Elles contiennent un grand nombre de figures; mais ces figures ont été tracées une seconde fois, sur de petits carrés de papier, [13]) avec plus de soin, mais sans modifications importantes; évidemment pour préparer la publication du traité.

Dans l'automne de 1650 le traité avec les figures fut envoyé à van Schooten afin de le soumettre à son jugement. Il comptait alors quatre livres. [14]) Dans ses lettres du 27 septembre 1650 (N°. 85, p. 130 du T. I) et du 21 novembre 1650 (N°. 89, p. 135 du T. I) van Schooten le loua beaucoup et le renvoya avec la dernière lettre dans laquelle il présenta quelques remarques de peu d'importance et auxquelles Huygens n'a pas donné suite.

Ensuite les deux premiers livres furent revisés et condensés dans un seul livre, le „Liber I” de notre texte [15]). Enfin tout était prêt pour la publication, qui

---

correspondent entre eux dans un certain sens puisqu'ils indiquent l'un et l'autre le cas où les points B et D des figures, p. 87, qui représentent les positions diverses du corps flottant, cylindre ou parallélipipède, se trouvent tous les deux à la fois dans la surface du liquide; mais tandis que le point L se trouve sur la limite supérieure du tableau de l'avertissement, il en est autrement pour le point P. De même l'analogie étroite qui existe dans le cas du parallélipipède entres les cas ② et ④, manque complètement dans le cas du cylindre. En conséquence le „Theorema 12”, p. 185, du „Liber III”, lequel se rapporte à la partie de la représentation graphique de la note 37, p. 176, qui se trouve au dessus de la ligne GPH, et le „Theorema 8”, p. 152 du „Liber II”, qui s'occupe surtout des positions ④ et ⑤ ne correspondent pas entre eux.

[13]) Sous cette forme elles ont pu servir à copier au graveur pour la présente publication. On trouve sur le revers de chacun de ces petits carrés de papier des indications de Huygens sur l'endroit du texte où la figure doit être placée.

[14]) On peut s'en convaincre en combinant la phrase „Perlegeram jam duos primos libros” de la lettre de van Schooten du 27 septembre 1650. avec cette autre: „neque dubia me spes tenet posteriores duos libros multo etiam magis placituros” de la réponse de Huygens (notre N°. 85^a, p. 561 du T I).

[15]) En effet, sur les revers des seize premières figures du „Liber II” présent le numéro indiquant le „Liber” auquel elles appartiennent, était primitivement un 3 qui a été parfois transformé par quelques traits de plume dans un 2 et d'autres fois biffé et remplacé par ce même chiffre 2. Ce qui prouve que le „Liber II” présent était primitivement le troisième livre et que les deux

toutefois n'eut pas lieu. Probablement elle fut remise d'abord pour faire précéder l',,Ἐξέτασις" [16]) qui avait plus d'actualité; puis les travaux sur la dioptrique ont beaucoup occupé Huygens. [17])

En attendant Huygens ne perdait point de vue entièrement le traité qu'il avait composé. Il en donne un résumé à Gregorius à St. Vincentio dans une lettre du 25 octobre 1651 (notre N°. 100, p. 151 et 152 du Tome I) [18]) mentionnant avec une certaine prédilection le „Theorema 7", p. 167 du „Liber III", c'est-à-dire, le premier des deux théorèmes sur la stabilité d'un cylindre flottant avec l'axe dans la situation verticale. De même il en écrit le 29 décembre 1652 à G. A. Kinner de Löwenthurm (voir le N° 146 à la page 212 du T. I), le 27 juillet 1657 à de Sluze (voir le N°. 397 à la page 41 du T. II) et enfin le 19 novembre 1667 (voir le N°. 1610 à la page 162 du T. VI) à Léopold de Medicis.

Le 25 janvier 1652 il se remit à l'œuvre et commença à s'occuper de nouveau des conditions d'équilibre d'un cône droit flottant traitées déjà d'une autre façon dans le „Theorema 14", p. 115, du „Liber I." Nous avons reproduit ces travaux inachevés dans l'Appendice II du présent traité.

---

premiers livres ont été remaniés pour constituer le „Liber I" que nous possédons. Et ainsi la lacune dans la numération des pages, que l'on remarque entre le „Liber I" et le „Liber II", s'expliquerait facilement par une sorte de condensation subie pendant cette opération.

De plus sur le revers de l'onzième figure du „Liber I" (p. 106), l'inscription „2 Lemma 1" fut changée en „1 Lemma 1", d'où il suit que primitivement le premier livre ne s'étendait pas plus loin que jusqu'à la fin du présent „Theorema 9".

Malheureusement il est impossible de savoir quelle était la nature des changements apportés. Seulement le fait, qu'au moins les figures 12—20 du présent „Liber I", et peut-être toutes les figures de ce livre à l'exception de la onzième, ont été dessinées de nouveau donne à présumer que l'altération était assez profonde. Si elle s'est étendue jusqu'aux théorèmes fondamentaux, elle expliquerait facilement l'incongruité dont nous venons de constater l'existence.

Ajoutons que la note 2 de la Lettre N°. 85 (p. 130 du T. I.) est erronée, là où il est dit que „les mots mentionnés ni d'autres particularités" marquées dans la Lettre N°. 89 de van Schooten (celle du 21 novembre 1650) ne se retrouvent pas dans le manuscrit que nous possédons. Tout au contraire les mots *„cum defectu"* que van Schooten voulait remplacer par „detracto" se retrouvent à tout moment dans les „Libri II et III" à commencer par la démonstration du „Lemma 3" du „Liber II", p. 127 du Tome présent. Et, de même, ce qui est dit des figures qui accompagnent les premiers théorèmes du „Liber I" correspond parfaitement à leur état actuel.

[16]) L'ouvrage cité dans la note 1 de la Lettre N°. 95 (p. 145 du T. I).

[17]) Voir la lettre à van Schooten du 29 octobre 1652, N°. 130 (p. 186 du T. I.). „Scis me hoc argumentum" [de solido corpore in humidum immerso] „antehàc pertractasse. Nunc autem in dioptricis totus sum".

[18]) Voir encore la réponse de Gregorius (N°. 101 à la page 153 du T. I.) et la réplique de Huygens (N°. 102, aux pages 154 et 155 du même Tome.)

Le 23 Mars de cette même année Huygens annota fur la page du titre: „Omnia mutanda" et de même en 1679. „Pleraque rejicienda fi non omnia. quia fpeculatio parum utilitatis habet, quamquam et Archimedes ipfe in his operam pofuit." Et encore, à la même ou à une autre occafion, fur la première page du „Liber I": „Haec de corporibus folidis in liquido fupernatantibus in primà adolefcentia fcripfi, cum nullum adhuc majoris momenti argumentum fefe obtuliffet, In his autem utilitas nulla, vel perquam exigua, Etfi Archimedes fecundo περὶ ὀχȣμένων libro non abfimilia tractaverit. E primis Theorematis quaedam retineri poffent [19]) item de Cylindris. [20]) Reliqua vulcano tradenda."

Mais nous croyons que l'on nous faura gré de n'avoir pas donné fuite à cette dernière recommandation et qu'on ne foufcrira pas au jugement fi févère, porté par Huygens fur fon propre travail. A ce propos nous remarquerons feulement qu'au nom illuftre d'Archimède, mentionné par Huygens, on pourrait joindre aujourd'hui les noms de plufieurs autres favants qui, depuis, fe font occupés du même fujet et qui ont été devancés par Huygens fur des points importants dans le traité que nous publions; à commencer par Daniel Bernoulli [21]), Bouguer [22]) et Euler [23]) et à finir par M. Guyou qui a donné en 1879 [24]) une théorie nouvelle, appelée par M. Appell [25]) „la première théorie rigoureufe de la ftabilité des corps flottants"; théorie qui repofe fur le même principe que celle de Huygens. [26])

[19]) Sans doute surtout les „Theoremata 6 et 7" (p. 103—104) que nous avons mentionnés plus haut dans cet „Avertissement".

[20]) La déduction du centre de gravité d'un tronc de cylindre, c'est-à-dire les „Theoremata 1—4", p. 159—162, du „Liber III".

[21]) Voir les notes 54, p. 115, du „Liber I" et 22, p. 168, du „Liber III".

[22]) Voir la note 18, p. 128 du „Liber II".

[23]) Voir les notes 18 et 51, p. 140, du „Liber II".

[24]) Dans la „Revue maritime" de mars 1879. On trouve un compte rendu détaillé de la théorie de M. Guyou dans le T. 3 (p. 211—217 de l'édition de 1903) du „Traité de mécanique rationelle" de M. Appell.

[25]) Voir la page 189 de l'ouvrage cité de M. Appell.

[26]) C'est-à-dire le principe d'après lequel le centre de gravité de l'ensemble du corps flottant et du liquide se place aussi bas que possible. Tout comme Huygens l'a fait, M. Guyou commence par déduire de ce principe l'horizontalité de la surface libre du liquide et ensuite la loi d'Archimède. Et même le „Theorema 6" (p. 103) de Huygens, sur la valeur minima de la différence de niveau du centre de gravité du corps flottant d'avec celui de sa partie immergée, se retrouve chez M. Guyou.

DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBRI 3.

A°. 1650. [1])

[LIBER I.]

HYPOTHESES. [2])

I.

Si Corpus ſponte, ſeu gravitate ſuâ moveri incipiat, deorſum moveri; id eſt ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo.

II.

Si Corpora plura gravitati ſuâ moveri incipiant, ea deorſum moveri; id eſt, ut centrum gravitatis ex omnibus compoſitae propius fiat plano horizonti parallelo.

---

[1]) Sur la feuille qui contient le titre Huygens a ajouté plus tard: „Omnia mutanda 1652, mart. 23" et ensuite: „1679. Pleraque rejicienda si non omnia. quia speculatio parum utilitatis habet, quamquam et Archimedes ipse in his operam posuit". Consultez à propos de ces annotations la dernière page de l'„Avertissement" qui précède cette pièce.

[2]) Ici encore, c'est-à-dire sur la première feuille du traité, Huygens a annoté en marge: „Haec de corporibus solidis in liquido supernatantibus in primà adolescentia scripsi, cum nullum adhuc majoris momenti argumentum sese obtulisset, In his autem utilitas nulla, vel perquam exigua, Etsi Archimedes secundo περὶ ὀχȣμένων libro non absimilia tractaverit. E primis Theorematis quaedam retineri possent item de Cylindris. Reliqua vulcano tradenda". Voir l'„Avertissement", p. 92.

III. [3])

Si liquido corpus ſolidum immergatur, tantam liquidi molem ſupra propriam ſuperficiem aſcendere, quanta eſt moles corporis infra eandum ſuperficiem depreſſi.

Theorema 1.

Liquidum quieſcit cùm ſuperficies ejus plana eſt, et horizonti parallela. [4])

Fig. 1. [5])

Sit vas ABCD continens liquidum cujus ſuperficies FE plana ſit et parallela horizonti; dico illud quieſcere.

Si enim non quieſcit, moveatur itaque, ut ſuperficies ejus fiat AGHID.

Quia igitur ſpatia AGHIDCB, et FECB ſunt aequalia, dempto communi ſpatio FGHIECB, erit ſpatium GHI aequale duobus FAG et EDI. Porro quia ſpatium GHI totum eſt infra planum FE, ſequitur centrum gravita-

[3]) Sur une feuille contenant, à ce qu'il nous semble, l'avant-projet de la première partie du traité présent (jusqu' au theorème 3 inclus), on trouve, au lieu des trois hypothèses formulées du texte, les considérations suivantes: „Liquidi naturam esse ut quatenus se extendere a vase continente non prohibetur, descendat, ac proinde eam figuram sumat cujus centrum grav. sit quam humillimum.

„Corpore autem solido super liquidum innatante, ita utrumque se componere ut centrum gr. commune sit quam humillimum".

Ensuite on rencontre sur la même feuille une esquisse de la figure du „Theorema 1" du texte et une démonstration du „Theorema 3" que nous reproduirons dans la note 14.

[4]) Le théorème correspond à la „Propositio II" d'Archimède: „Omnis humidi consistentis, atque manentis superficies sphaerica est; cuius sphaerae centrum est idem, quod centrum terrae", que nous citons d'après l'ouvrage: „Archimedis de iis quae vehuntur in aqua libri duo. A Federico Commandino Urbinate in pristinum nitorem restituti, et commentariis illustrati. Cum privilegio in annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV". 4°. Voir la page 1 verso. On le trouve sous une autre rédaction, p. 360 du T. II de l'édition de Heiberg, mentionnée dans la note 2 de la page 50 du Tome présent; mais nous préférons ici et ailleurs de citer d'après Commandin parce que Heiberg a suivi l'édition de Tartalea et qu'il est bien plus probable que Huygens se soit servi de celle de Commandin ou d'une de celles qui en dérivent.

Ajoutons que la démonstration qui va suivre, partant d'un autre principe, diffère complètement de celle d'Archimède. On en rencontrera une autre leçon dans l'Appendice I du traité présent.

Voir encore, sur une déduction moderne du même théorème, analogue à celle de Huygens, la note 26 de l'Avertissement.

[5]) La numération des figures est de nous.

tis liquidi quod eo continebatur fuiſſe infra planum FE; ſimiliter quia ſpatia FAG, EDI, ſunt tota ſupra planum FE, ſequitur centrum grav. liquidi quod iis continetur eſſe ſupra idem planum. Igitur centrum gravitatis liquidi quod continebatur ſpatio GHI, altius factum eſt poſtquam idem liquidum aſcendit in ſpatia FAG, EDI; liquidi autem quod continetur ſpatio FGHIECB centrum grav. eodem manet loco. Ergo centrum gravitatis omnis liquidi altius eſt cum continetur ſpatio AGHIDCB, quam cum terminatur ſuperficie FE. Sed quia liquidum ſponte motum eſt, oportet ut centrum ſuae gravitatis eo motu deſcenderit [a] [6]), igitur ſimul et aſcendit et deſcendit, quod eſt abſurdum.

Theorema 2.

Corpus ſolidum, quod liquido ſuae magnitudinis aequiponderat, demiſſum in liquidum, ita ut totum demerſum ſit, contingatque tantummodo liquidi ſuperficiem, ita ut poſitum eſt manebit. [7])

Sit vas ADCB continens liquidum, in quod demerſum ſit corpus ERF, aequiponderans liquido ſuae magnitudinis, ita ut totum demerſum ſit, contingatque tantummodo liquidi ſuperficiem AB ſecundum EF: dico ita poſitum quieſcere.

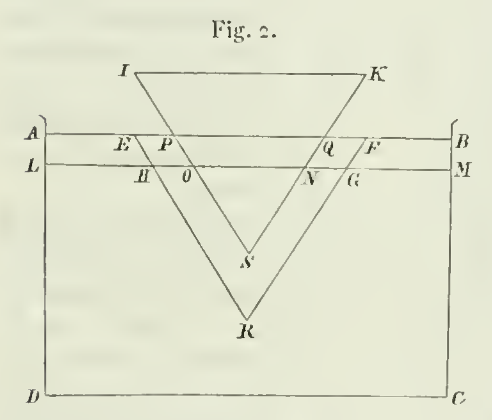


Fig. 2.

Si enim non quieſcit, aſcenderit primum uſque in ISK, ideoque liquidum deſcenderit ex ſpatiis AEHL, FBMG. ad replendum ſpatium HOSNGR, quod neceſſario prioribus duobus aequale eſt.

Quia igitur ſpatium LMCD utrâque corporis poſitione plenum eſt materia ejuſdem gravitatis, ſequitur etiam eodem loco habiturum centrum ſuae gravitatis; at reliqua gravitas quae priori poſitione continetur ſpatio ABML, minus altum habet centrum ſuae gravitatis quam poſitione ſecunda cum continetur ſpatio IONK, quia pars PONQ communis eſt, et partis IPQK centrum grav. ſupra planum AB, partium vero APOL, BQNM infra idem planum, Igitur centrum gravitatis univerſae tam liquidi quam corporis

---

[6]) La lettre *a* est un signe de renvoi ajouté par Huygens. En effet, on lit en marge: „*a* hypoth. 1".

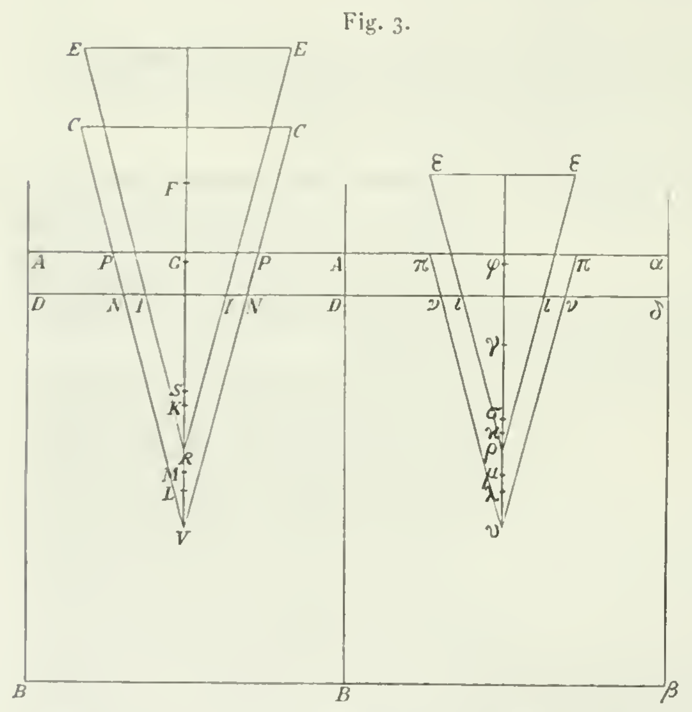
[7]) Theorème correspondant à la Prop. III (p. 2 verso) de l'édition de Commandin: „Solidarum magnitudinum, quae aequalem molem habentes aeque graves sunt, atque humidum; in humidum demissae demergentur ita, ut ex humidi superficie nihil extet: non tamen ad huc deorsum ferentur". (Heiberg, T. II, p. 362). Démonstration essentiellement différente.

impositi posteriori positione altius est quam priori, quod est contra hypoth. 2dam, quum statuatur corpus ultro motum esse. Non ascendet igitur corpus ERF; Sed neque descendet, nam si recesserit a superficie liquidi; continuò is locus quo excessit replebitur liquido, unde fiet ut semper totum spatium ABCD plenum sit materia ejusdem gravitatis, ideoque habeat centrum gravitatis eodem loco. Absurdum igitur quoque est corpus ERF amplius descendere, Ergo ut positum est manebit, quod erat demonstrandum.

Theorema 3.

Corpus solidum levius liquido ita ei supernatat, ut tanta moles liquidi, quanta est partis mersae, toti corpori aequiponderet. [8])

Fig. 3.



Sit vas ABBA continens liquidum, cui impositum sit corpus CVC, ita ut liquidum tantae molis, quanta est partis mersae PVP, toti corpori aequiponderet; dico corpus CVC neque emersurum magis, neque ulteriùs demersum iri.

Si enim fieri potest emergat primum, et ponatur sublatum usque in ERE. Sit G centrum gravitatis corporis CVC, et F ejusdem quum sustulit sese in ERE; sit etiam M centrum grav. omnis liquidi primâ corporis positione, nimirum liquidi APVPABB; L vero positione secundâ, nimirum liquidi DIRIDBB; constat autem M fore supra L, nam

[8]) Théorème correspondant à la Prop. V, p. 4 recto de l'édition de Commandin: „Solidarum magnitudinum quaecunque levior humido fuerit, demissa in humidum usque eò demergetur, ut tanta moles humidi, quanta est partis demersae, eandem, quam tota magnitudo, gravitatem habeat." (Heiberg, T. II, p. 367). Démonstration différente.

Voir encore, sur une demonstration moderne fondée sur le même principe, la note 26 de l'Avertissement.

utrâque positione commune quidem est liquidum DNVNDBB, at reliqua liquidi pars quae primò continebatur spatiis duobus APND, quae sunt supra planum DD, postea descendit ad replendum spatium NIRINV, quod est infra planum DD. divisa porro sit linea GM (quae interjacet centra grav. corporis, et omnis liquidi, primâ positione) in K, ita ut MK sit ad KG, sicut gravitas corporis ad gravitatem liquidi, eritque K centrum gravitatis universae primâ corporis positione. Item FL divisa sit in S, secundum proportionem eandem eritque S centrum grav. universae positione corporis secunda. Si igitur punctum S puncto K altius esse demonstratum fuerit, sequetur absurdum esse, corpus CVC sponte suâ motum fuisse, nam S deberet esse infra K[a] [9]) Illud autem sic demonstrabitur. Sit juxta positum vas alterum AB$\beta\alpha$, priori simile et aequale, eâdem positum altitudine; liquidi etiam contineat tantundem cujus superficies sit Aα, nempe dum ei immersum est corpus $\pi\upsilon\pi$, quod figuram et magnitudinem habeat partis mersae PVP, gravitatem vero quam liquidum suae molis, id est gravitatem totius corporis CVC; et centrum gravitatis γ. Jam idem corpus è liquido extrahatur usque in $\varepsilon\rho\varepsilon$, in quantum sublatum ponebatur corpus CVC, ita ut ρ sit eâ altitudine quâ R; sitque φ centrum grav. corporis positi in $\varepsilon\rho\varepsilon$. et manifestum est distantiam $\gamma\varphi$ aequalem esse GF. praeterea quoque manifestum est priori positione corporis $\pi\upsilon\pi$, centrum gravitatis omnis liquidi fuisse in μ altitudinis M, posteriori vero esse in λ altitudinis L. denique divisa sit $\mu\gamma$ in $\varkappa$, ita ut $\mu\varkappa$ sit ad $\varkappa\gamma$, sicut gravitas corporis $\pi\upsilon\pi$ ad gravitatem omnis liquidi, et $\lambda\varphi$ in σ secundum proportionem eandem, eritque $\varkappa$ centrum gravitatis universae posito corpore in $\pi\upsilon\pi$, et σ sublato eodem in $\varepsilon\rho\varepsilon$.

Quia igitur patet ex Theorematis praecedentis demonstratione, quod corpore $\pi\upsilon\pi$ sublato in $\varepsilon\rho\varepsilon$, centrum gravitatis universae altius sit quam fuerit antea, sequitur hic centrum grav. σ altius esse quam $\varkappa$; Est autem per constr. $\lambda\sigma$ ad $\sigma\varphi$ ut $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$, igitur $\lambda\varkappa$ ad $\varkappa\varphi$ minorem habet rationem quam $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$; igitur et dividendo $\lambda\mu$ ad $\gamma\varphi$ minorem habet rationem, quam $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$, [10]) sive quam MK ad KG, hanc enim manifestum est esse eandem.

ergo quum $\lambda\mu$, LM, et $\gamma\varphi$, GF sint aequales, habebit LM ad GF rationem minorem quam MK ad KG, et componendo LK ad KF minorem quam MK ad KG [11]),

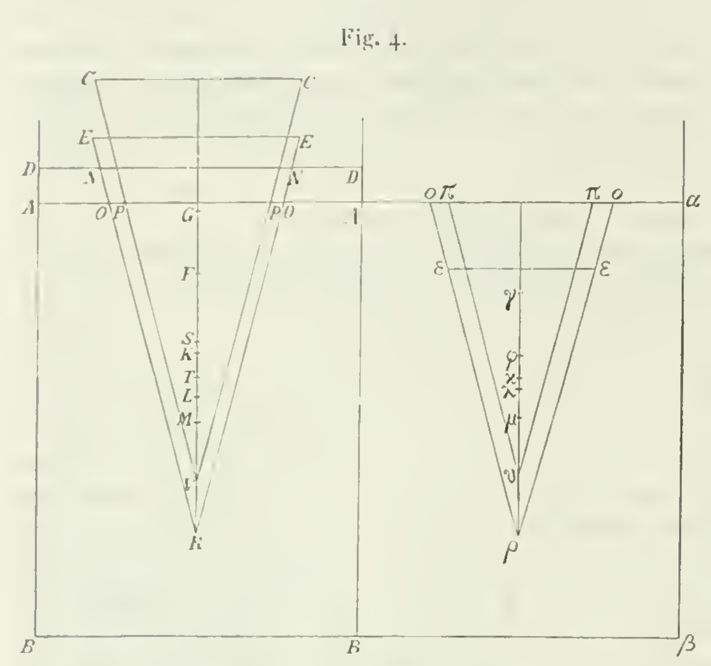
---

[9]) Huygens annota en marge „a hypoth. 2."

[10]) En effet l'inégalité $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{a-c}{b-d} < \frac{c}{d}$, quand on a, comme ici, $c < a$, $d < b$. Quant à l'emploi du terme „dividendo", comparez p. e. l'ouvrage de Clavius „Euclidis Elementorum Libri XV", cité dans la note 6 de la Lettre N°. 325 (p. 477 du T. I), où l'on rencontre ce terme dans la „Prop. 29" du „Liber V" (p. 521 de l'édition de 1607). La proposition appliquée ici par Huygens se déduit facilement en combinant le „Scholium" de cette „Prop. 29" avec celui de la „Prop. 27" du même livre.

[11]) Puisque encore $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ entraîne $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Comparez la „Prop. 28", p. 520 de l'ouvrage mentionné dans la note précédente.

five quam LS ad SF; unde fequitur punctum S effe fupra K; quare abfurdum eft dicere corpus CVC afcendiffe usque in ERE.



Jam corpus CVC, fi fieri poteft, amplius demergatur ufque in ERE, [12]) ideoque liquidum ex fpatio OPVPOR ascenderit in fpatia DNOA. Sit rurfus G centrum gravitatis corporis CVC; F verò ejusdem cum eft in ERE. Sit etiam M centrum gravitatis omnis liquidi primâ pofitione corporis, nimirum liquidi APV PABB, T verò liquidi omnis DNRNDBB: divifaque fit GM (quae interjacet centra gravitatis corporis et liquidi,) in K, ita ut MK fit ad KG, ficut gravitas corporis ad gravitatem omnis liquidi, eritque K centrum gravitatis univerfae pofito corpore in CVC. Item TF divifa fit fecundum proportionem eandem, in S, eritque S centrum gravitatis univerfae pofito corpore in ERE. Si itaque demonftratum fuerit punctum S puncto K altius effe, fequetur abfurdum effe, corpus CVC fponte fua motum fuiffe, nam S deberet effe infra K^{b} [13]). Illud autem fic demonftrabitur.

Ponatur ut fuprà alterum vas $AB\beta\alpha$, liquidi continens tantundem ac vas ABBA, cujus liquidi fuperficies fit $\Lambda\alpha$, dum ei immerfum eft corpus $\pi\upsilon\pi$, quod figurâ quidem magnitudine et difpofitione idem fit cum parte mersâ PVP, gravitate verò aequale liquido fuae molis, ut nempe aequet gravitatem totius corporis CVC. dicti corporis $\pi\upsilon\pi$ centrum gravitatis ut fuprà fit γ, et μ liquidi $A\pi\upsilon\pi\alpha\beta B$. deinde idem corpus deprimatur ufque in $\varepsilon\rho\varepsilon$, in quantum defcendit corpus CVC, ita ut ρ fit eâ altitudine quâ R; atque hâc ejus pofitione, ipfius quidem centrum gravitatis fit φ, liquidi vero circumfluentis centrum grav. λ. Manifeftum autem eft, quia vas $AB\beta\alpha$ utrâque corporis pofitione plenum eft materia ejufdem gravitatis, cen-

[12]) Voir la figure 4.

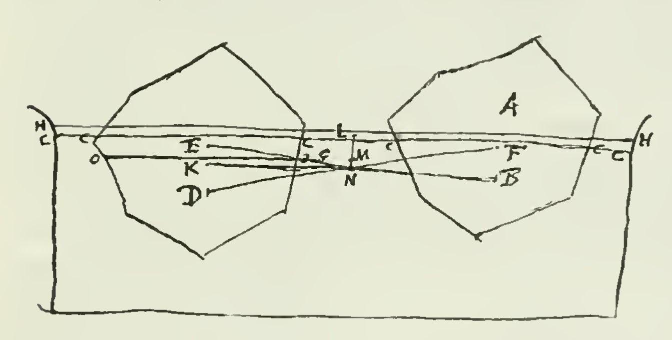
[13]) Huygens annota en marge „b hypoth. 2."

trum univerſae gravitatis utrâque poſitione idem eſſe; unde ſi $\varkappa$ fuerit centrum gravitatis univerſae, erit tam $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$ quàm $\lambda\varkappa$ ad $\varkappa\varphi$ ſicut gravitas corporis ad gravitatem omnis liquidi. Jam porrò ſumatur ex M, ML aequalis ipſi $\mu\lambda$, eritque L infra T quod eſt centrum gravitatis liquidi DNRNDBB; nam quia liquidi contenti ſpatio AOROABB centrum grav. eſt ejusdem altitudinis atque centrum grav. liquidi ſimilis $A o \rho o \alpha \beta$B, reliqui verò liquidi contenti ſpatiis DNOA, centrum grav. altius quam reliqui liquidi contenti ſpatio $o o \varepsilon \varepsilon$, ſequitur centrum gravitatis omnis liquidi DNRNDBB quod eſt T, altiùs eſſe centro grav. omnis liquidi circumfuſi corpori $\varepsilon\rho\varepsilon$ quod eſt λ, ideoque T etiam ſupra L, nam L poſitum fuit ea altitudine quà λ. Quum igitur ſit $\lambda\varkappa$ ad $\varkappa\varphi$, ſicut $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$, erit etiam dividendo $\lambda\mu$ ad $\varphi\gamma$, ſicut $\mu\varkappa$ ad $\varkappa\gamma$, ſive ut MK ad KG, eadem enim eſt proportio. et quia $\lambda\mu$ ipſi LM, et $\varphi\gamma$ ipſi FG ſunt aequales, erit quoque LM ad FG, ut MK ad KG, et dividendo LK ad KF, ut MK ad KG, ſive ut TS ad SF; quare cum T ſit ſupra L, erit etiam S ſupra K. Igitur abſurdum quoque eſt dicere corpus CVC ulterius demerſum fuiſſe. Reſtat igitur ut neque magis emergere poſſit neque ulterius demergi, quod erat demonſtrandum. [14])

---

[14]) Voici une autre démonstration du même theorème, empruntée à la feuille détachée que nous avons mentionnée dans la note 3.

„Demonstratio propositionis archimedeae de innatantibus"



„Priori positu" [voir la figure de droite] „corpus AB, partem demersam habet B sub aquae superficie CC, et ponitur aquae moles aequalis parti B gravitatem habere corpori toti AB aequalem. Ostendendum est ita mansurum, ut nec magis nec minus demergatur. Si enim potest demergatur primo amplius, ut parti B quam abscindebat superficies aquae CC, jam infra aquam aequalis sit pars D infra superficiem OO sita, quo fiet ut aquae pars aequalis corporis portioni E, inter CC et OO interceptae, ascendat supra superficiem CC, puta ad HH.

Sit F centr. gr. totius AB corporis. B centr. gr. partis demersae sub CC D centr. gr. partis isti aequalis sub OO, sive aquae spatium D replente. Sit E centr. gr. spatii E inter CC et OO comprehensi. K vero centr. gr. corporis totius ut est in secundo positu.

Jungatur FD. Et dividatur bifariam in N. Erit in primà positione punctum N centr. gr. compositae ex corpore AB et aqua D sub OO contenta, quia cum haec aequalis sit aquae contentae spatio B sub CC posito, quae pondere

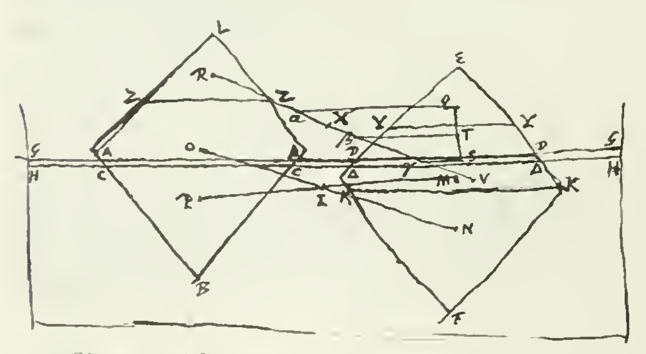
Theorema 4.

Corpus solidum ita liquido supernatat ut pars mersa ad totum eam habeat rationem, quam corpus ad liquidum in gravitate.

Sit Corpus AB liquido supernatans cujus superficies CD; dico partem mersam

aequalis ponitur corpori AB, oportet centr. gr. N dividere bifariam rectam centra connectentem FD. Sed et spatium E inter CC, OO aqua plenum est primà positione. Ergo juncta NE erit in ea centr. gr. compositae ex corpore AB et ex aqua spatii DE, quod centrum sit G.

Rursus in secunda positione quia distantia centrorum gr. K, D eadem est quae in primà positione erat centrorum F, B, apparet ducta K, B quae jungit centr. gr. totius corporis in secunda positione cum centro aquae occupantis jam spatium B sub CC, apparet inquam rectam KB transire per punctum N atque ibidem bifariam secari, adeo ut N quoque sit centr. gr. compositae ex toto corpore in secunda positione et aquae mole quae successit in spatium B sub CC. Quia autem aqua quae primà positione continebatur spatio E inter CC et OO, jam in secunda positione ascendit super CC in spatium CCHH necesse est ejùs aquae centr. gr. esse supra CC. sit in L et jungatur NL. Ergo in ea erit jam centr. gr. compositae ex corpore toto in secunda positione et ex aqua spatii B sub CC, et ex aqua supra CC elevata. quod centrum sit M. Erit autem necessario LN ad NM ut EN ad NG. Sed punctum L est altius quam E cum hoc sit infra illud supra superficiem CC. Ergo et punctum M altius quam G. Est autem M et G centr. gr. corporum quae positum mutant haec in prima, illud in secunda positione, reliquà aqua pristinum spatium obtinente. Ergo et centrum gravitatis illud ultro altius ascendisset quod est absurdum.

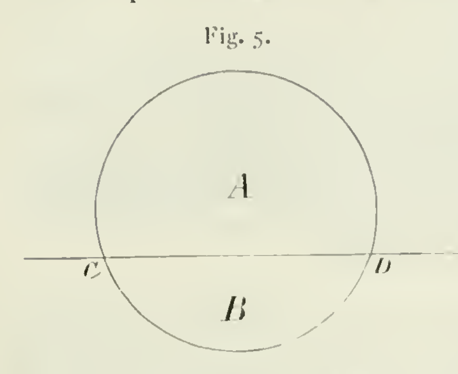


Dicatur jam corpus EF [voir la figure à côté] altius extra aquam emersurum, eoque posito intelligatur collocatum in LB. prima positione EF corpus, ABA aqua, itemque HHGG circumfusa.

Sit aqua ABA aequalis ponderis cum corporis parte YFY cujus centr. grav. M. et abscindatur KFK ∞ ABA. Ergo aqua spatii DDKK aequipond. parti corporis reliquae YEY vel ZLZ. quia aqua totius spatii DFD aequiponderans

B ad corpus AB eam habere rationem, quam idem corpus ad liquidum in gravitate, id eſt, quam habet gravitas corporis ad gravitatem liquidi ſuae molis. Liquidum namque tantae molis quanta eſt partis B aequiponderat corpori AB "[15]), atqui pondus liquidi magnitudinis B est ad pondus liquidi magnitudinis totius corporis, ſicut pars B ad totum corpus AB, ergo quod aequiponderat corpori AB, ſive gravitas corporis AB eſt ad gravitatem liquidi tantae molis quanta eſt corporis AB, ut magnitudo B ad magnitudinem totius corporis AB; quod erat oſtendendum.

Fig. 5.



ponitur corpori toti EF. Sit P centr. gr. spatii ABA, N spatii KFK. O partis ZBZ aequalis YFY. Jam secunda positione erit LB corpus, et aqua quae erat in ABA complebit KFK. Et reliqua aqua circumfusa quae erat inter GG et HH replebit spatium ΔΔKK.

In prima pos.^e centrum gr. compositae ex corpore YFY et aqua ABA erit punctum I quod bifariam secat PM. In secundo pos. erit idem I punctum centr. grav. compositae ex corpore ZBZ et aqua KFK, adeo ut quantum ad haec nihil mutaverit altitudo centri gr.

At in prima pos.^e centr. gr. aquae circumfusae inter GG, HH (excepta tamen hic ea quae replet spatium AACC) centrum gr. est inter GG, HH, quod sit S. ductaque SQ ad centr. gr. partis YEY, erit inter SQ centr. gr. compositae ex dicta aqua circumfusa et partem corporis YEY, esto illud T. In secunda pos. vero dicta aqua circumfusa continetur spatio KΔΔK ideoque centr. grav. habet inter ΔΔ et KK, quod sit V, et ducatur VR ad centr. gr. partis ZLZ ipsi YEY aequalis. Eritque in recta VR centr. grav. compositae ex aqua spatii ΔΔKK et corporis ZLZ. quod centrum sit X. Ergo RX ad XV ut QT ad TS. estque ratio minoris ad majus, quia cum aqua spatii DDKK aequiponderet corpori ZLZ, erit hoc gravius aqua spatii ΔΔKK, unde RX brachium brevius quam XV. Est autem altitudo S super V minor quam DD supra KK cui aequalis altit. R supra Q. hinc jam ostenditur X altius quam T. nam ductis ab Q, T, et S horizontalibus quae occurrant rectae RV in α, β, γ. Quia RX minor quam XV, et Rα major quam Vγ. Erit utique minor ratio αX ad Xγ quam RX ad XV, hoc est quam $\alpha\beta$ et $\beta\gamma$ unde αX minor quam $\alpha\beta$. Et X proinde altior β".
Dans l'Appendice I du traité présent on rencontrera une troisième démonstration du même théorème.

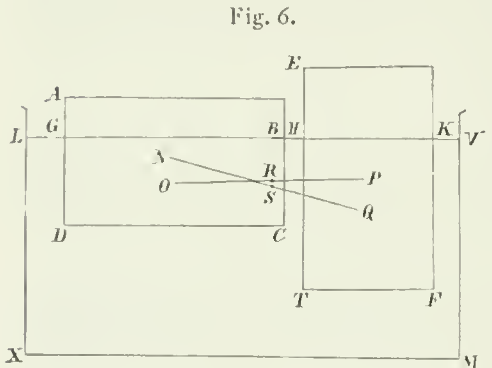
[15]) Huygens annota en marge: „a Theor. 3."

Theorema 5.

Si corpus ſolidum liquido ſupernatans inclinetur ultro et alium ſitum acquirat, tum punctum in medio poſitum lineae, quae conjungit centra gravitatis, corporis totius in poſteriori ſitu et partis merſae in priori, inferius eſt puncto quod item eſt medium lineae alterius, quae jungit centra gravitatis totius corporis in priori ſitu et partis merſae in poſteriori.

Sit vas LXMV, et ſuperficies liquidi eo contenti LV, ſupernatante ei corpore EF, quod ponatur ultro inclinari et ſitum acquirere diverſum, ita ut jam contineatur ſpatio AC. dico punctum S, in medio linea NQ, quae jungit centrum gravitatis corporis in poſteriori ſitu, cum centro partis merſae in priori, inferius eſſe puncto R, quod eſt in medio lineae OP, quae jungit centrum gravitatis corporis in priori ſitu cum centro gravitatis partis merſae ſitu poſteriori.

Fig. 6.



Intelligatur enim corpus EF nondum inclinatum eſſe, atque idea ſpatium DGBC adhuc liquido plenum, quod tamen ipſum concipiatur ut diſtinctum à reliquo liquido. Ergo quia liquidum quod continetur ſpatio DGBC aequiponderat corpori AC *a* [16]) ſive EF, erit utriuſque commune centrum gravitatis in R, medio lineae OP quae eorum centra gravitatis conjungit. Jam deinde intelligatur corpus in poſteriori ſitu in AC, et exceſſiſſe e priore loco: et quia pars merſa DGBC exactè aequalis eſt parti THKF, ideo quantum liquidi illâ continebatur, jam continetur ſpatio HKTF; quod liquidum, quia aequiponderat corpori AC erit utriuſque gravitatis centrum commune in S, medio lineae, quae eorum centra gravitatis conjungit. quum autem EF corpus ultro motum fuerit, debet centrum univerſae gravitatis, quae ex ipſo et ex omni liquido componitur poſteriori corporis ſitu inferius eſſe quam fuit dum corpus adhuc erat in EF. unde quum utroque ſitu centrum gravitatis reliqui liquidi XLGDCBHTFKVM maneat eodem loco, ſequitur centrum ejus gravitatis quae cum illo univerſam gravitatem conſtituit, poſteriori ſitu cum eſt in S, inferius eſſe debere quam priori corporis ſitu cum eſt in R. quod erat demonſtrandum.

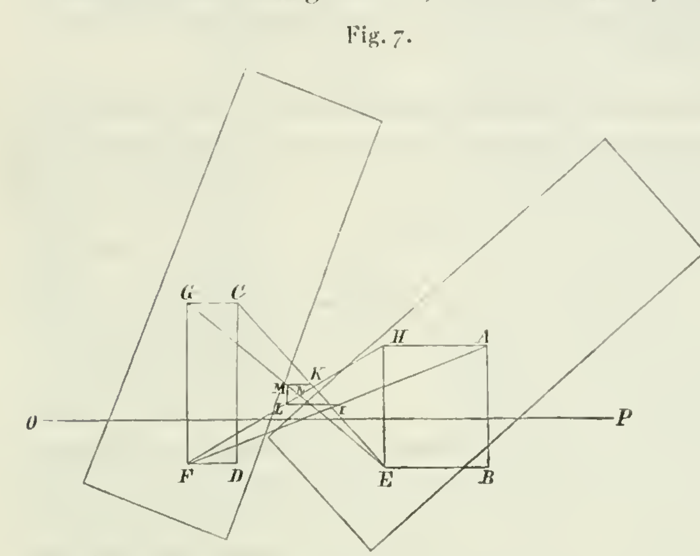
[16]) „*a* theor. 3. h. lib." [Huygens].

Theorema 6.

Si Corpus ſolidum liquido ſupernatans ultrò inclinetur et alium ſitum acquirat; altitudo centri gravitatis totius corporis ſupra centrum gravitatis partis merſae, minor erit poſitione corporis poſteriori quam priori.

Sint C et F centra gravitatis, illud totius alicujus corporis, hoc vero partis merſae corporis ejuſdem. Idem verò corpus ponatur ultro inclinatum, talemque ſitum acquiſijſſe, ut jam totius centrum gravitatis ſit A, partis verò merſae centrum gravitatis E. [dico altitudinem C ſuprà F majorem quàm eſt altitudo A ſupra E]. [16]) aganturque per puncta E et F lineae EB et FD parallelae ſuperficiei liquidi OP. dico perpendicularem AB, quae ex centro gravitatis A cadit in BE, minorem eſſe perpendiculari CD, quae cadit ex centro grav. C in FD.

Fig. 7.



abſolvuntur enim rectangula DG et BH, ſi opus eſt. (p[otes]t enim fieri ut perpd. CD inciderit in punctum F et AB ppd. inciderit in punctum E). junganturque AF, CE, HF et GE, quae duae ſeſe interſecant in N puncto, diviſisque CE et AF bifariam in K et I ducantur IL et KM ſuperficiei liquidi parallelae, quibus manifeſtum eſt etiam HF et GE bifariam dividi. denique jungatur ML.

Quum igitur ſupra demonſtratum ſit [17]), punctum I quod bifariam ſecat AF inferius eſſe puncto K. quod ſecat CE bifariam, ſequitur et punctum L inferius eſſe puncto M: cumque GF et HE ſunt parallelae, erit linea ML, quae utramque GE et FH bifariam dividit, iisdem GF et HE parallela. caditque eadem ML neceſſario ab eâ parte interſectionis N, quae eſt verſus poſitionem corporis prio-

[16]) Au lieu de la phrase entre crochets ou trouve dans le texte un signe de renvoi correspondant à l'annotation en marge; „dico altitudinem &c. ut in Theor. sequ."; mais nous avons préféré de construire la phrase d'après l'indication contenue dans cette annotation.

[17]) Voir le „Theorema 5."

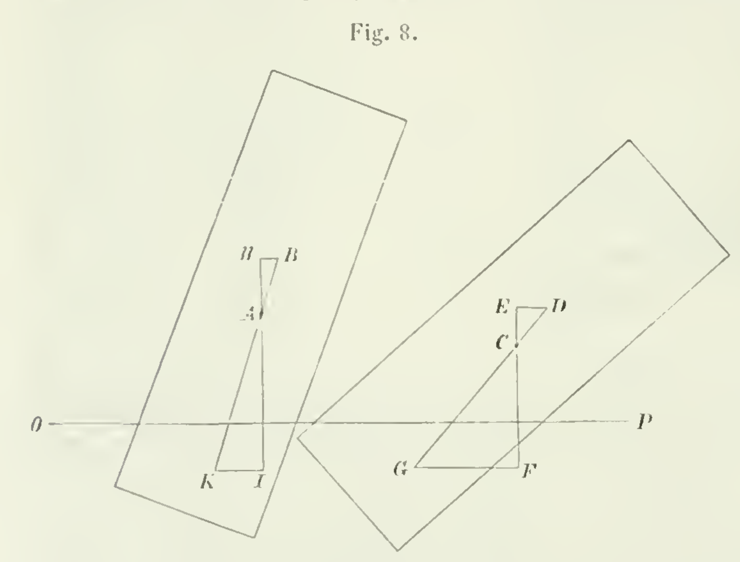
rem. quia itaque GM aequalis eſt ME, erit GN major quàm NE; quae quum ſint homologa latera ſimilium triangulorum GNF, ENH, erit et GF major quam HE. unde et CD major quam AB; quod erat demonſtrandum.

Theorema 7.

Si corpus ſolidum liquido ſupernatans ultrò inclinetur et alium ſitum acquirat, altitudo centri gravitatis partis enatantis ſupra centrum gravitatis totius corporis minor erit poſitione corporis posteriori quam priori.

Sint A et B centra gravitatis, illud totius alicujus corporis, hoc verò partis quae enatat. Idem verò corpus ponatur ultro inclinatum talemque ſitum aquiſijſſe, ut jam totius centrum grav. ſit C, partis verò quae enatat centrum grav. D. dico altitudinem B ſuprà A majorem, quàm eſt altitudo D ſupra C. id eſt, ductis BH et DE parallelis ſuperficiei liquidi OP, in easque perpendicularibus AH, CE, majorem eſſe HA quam CE.

Fig. 8.



Productis enim BA et DC, fiat AK ad AB, nec non CG ad CD, ut partes enatantes ad partes merſas; et manifeſtum eſt K et G fore centra gravitatis partium merſarum. ſimiliter productis HA et EC fiant AI ad AH nec non CF ad CE, ut KA ad AB, ſive ut GC ad CD, eadem enim eſt proportio. jungantur KI et GF et manifeſtum eſt utramque parallelam fore ſuperficiei liquidi. Igitur propter triangula ſimilia KAI, BAH, eſt IA ad AH, ſicut KA ad AB; ſed KA eſt ad AB, ſicut GC ad CD, quia utroque corporis ſitu pars merſa ad enatantem habet eandem rationem; igitur IA eſt ad AH, ut GC ad CD; GC autem eſt ad CD, ut FC ad CE, propter ſimilia triangula GCF, DCE; igitur IA ad AH, ſicut FC ad CE, eſt autem IA major quam CF[a] [18]), ergo et AH major quàm CE. quod erat demonſtrandum.

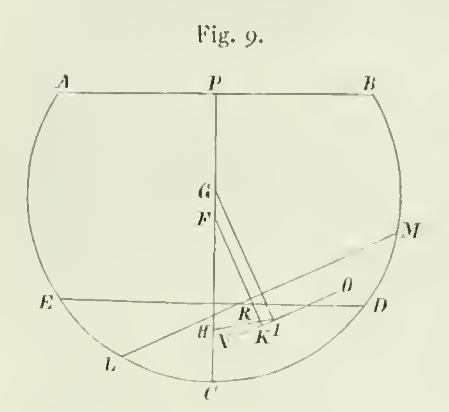
[18]) „*a* theor. 6." [Huygens].

Theorema 8. [19])

Sphaerae portio liquido ſupernatans demerſo vertice, quamcumque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. [20])

Sit portio ſphaerae ACB, liquido ſupernatans, cujus ſuperficies ED. ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate eſſe, ut pars ECD eſt ad totam portionem, axis autem PC ſit ad perpendiculum ſuperficiei ED. dico portionem ita poſitam quieſcere. Si enim fieri poteſt moveatur, ita ut jam ſuperficies liquidi ſit LM, et pars merſa LCDM et portio ſecari intelligatur plano ACB per axem, recto ad ſuperficiem liquidi: Sitque G centrum ſphaerae; F centrum gravitatis portionis ACB; H verò partis prius merſae ECD. Item I partis LCDM. Sit porrò per I ducta NO parallela LM: et junctâ GI, quam manifeſtum eſt perpendicularem eſſe ad NO; in eandem NO perpendicularis cadat FK. jungantur rectâ lineâ centra gravitatis H et I, quam manifeſtum eſt alicubi ſecare debere FK, ut in R, quia centrum grav. F ſemper cadit inter G et H.

Fig. 9.



Quum igitur PC ſit perpendicularis ad ſuperficiem liquidi ED, ſequitur FH eſſe prius altitudinem centri gravitatis portionis ACB ſupra centrum grav. partis merſae ECD. Similiter FK eſt altitudo centri grav. portionis ACB ſupra centrum grav. partis merſae LCDM, nempe quum portio mota eſt. quia autem partes ECD, LCDM ſunt aequales, ſequitur centrum ſphaerae ab earum centris gravit. H et I aequaliter diſtare; quam ob rem GI aequalis eſt GH; unde et FR aequalis FH;

[19]) Avec le théorème qui suit, la série des théorèmes généraux, auxquels le théorème 1 du livre II se joindra plus tard, est interrompue. Et Huygens procède à appliquer les résultats obtenus, d'abord aux théorèmes plus spéciaux, découverts par Archimède, qui se rapportent aux segments sphériques et aux conoïdes paraboliques flottants, et dont il va donner des démonstrations nouvelles; ensuite à la détermination de la stabilité des positions d'équilibre d'autres corps flottants; c'est-à-dire des cônes de révolution flottant avec l'axe dans la situation verticale.

[20]) Theorème correspondant à la Prop. VIII p. 6 recto de l'édition de Commandin: „Si aliqua magnitudo solida leuior humido, quae figuram portionis sphaerae habeat, in humidum demittatur, ita ut basis portionis non tangat humidum: figura insidebit recta, ita ut axis portionis sit secundam perpendicularem. Et si ab aliquo inclinetur figura, ut basis portionis humidum contingat; non manebit inclinata si demittatur, sed recta restituetur". (Heiberg, T. II, p. 371).

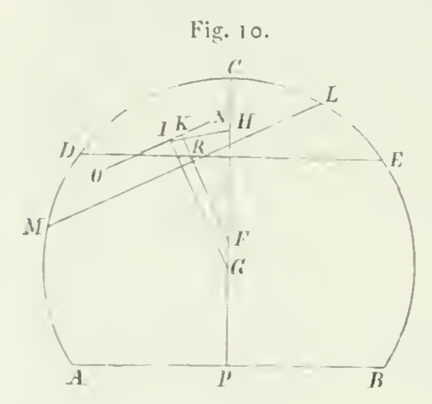
FK vero major eſt quàm FR; ergo et major quàm FH; quod eſt abſurdum, quum portio ultro mota dicatur[b 21]). Non movebitur igitur, quod erat oſtendendum.

Theorema 9.

Sphaerae portio liquido ſupernatans demerſâ baſe quamcùnque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem perpendiculari. [22])

Repetatur eadem figura ſed invertatur, habeatque jam portio ad liquidum in gravitate proportionem, quam pars DABE ad totam. unde ſi axis CP ponatur ad perpendiculum ſuperficiei DE, erit pars merſa DABE, enatabit verò pars DCE quae theoremate praecedenti merſa erat, dico autem ſic poſitam quieſcere.

Fig. 10.



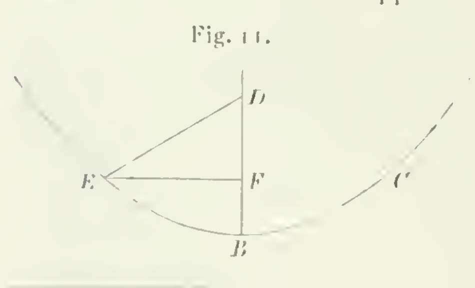
Si enim non quieſcit itaque moveatur ut jam ſuperficies liquidi ſit ML et reliqua conſtructa ſint ut ſupra. Igitur iterum altitudo KF major erit altitudine FH, quod eſt abſurdum[c 23]), quum portio ultro mota dicatur; quieſcetergo; quod erat demonſtr.

Lemma 1.

Sit parabole vel hijperbole EBC, in cujus axe DB, ſumpta ſit BD non major dimidio latere recto; ductaque ſit ex D alia linea DE quae ſectioni occurrat. dico DE majorem eſſe quam DB. [24])

Ducatur enim ordinatim applicata EF. Quia igitur rectangulum ſub BF et latere recto aequale vel minus eſt quadrato FE, DB vero non major dimidio latere recto, ſequitur duplum rectanguli DBF non majus eſſe quadrato FE: ergo addito utrinque quadrato DF, erit duplum rectanguli DBF una cum quadrato DF non majus quadrato DE. ſed duplum rectanguli DBF una cum quadrato

Fig. 11.



[21]) „b. theor. 6.“ [Huygens].

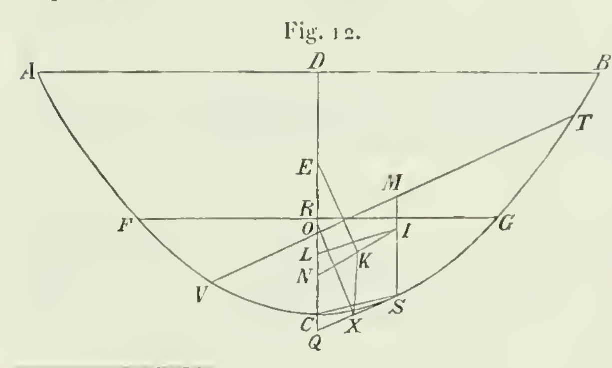
[22]) Théorème correspondant à la Prop. IX p. 8 recto de l'édition de Commandin: „Quòd si figura“ [portionis sphaerae] „leuior in humidum demittatur. ita ut basis tota sit in humido;

DF excedit quadratum DB, quadrato FB. Igitur quum duplum rectanguli DBF una cum quadrato DF non majus esse demonstratum fuerit quadrato DE, erit quadratum DB minus quadrato DE; quare et DB minor quam DE; quod erat ostendendum.

Theorema 10.

Recta portio Conoidis parabolici, si axem habuerit minorem quam subsesquitertium[25]) *lateris recti* [a 26]), *et proportionem ad liquidum in gravitate quamcunque; liquido supernatans demerso vertice, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari.* [27])

Sit recta portio Conoidis parabolici ACB, cujus axis DC minor sit $\frac{3}{4}$ lateris recti et liquido supernatans posita sit recta, ita ut axis DC sit perpendicularis ad liquidi superficiem quae sit FG (ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate habere eam proportionem quam pars FCG ad totam portionem,) dico eam ita positam necessario consistere.



Si enim fieri potest inclinet ad partem aliquam ita ut jam liquidi superficies sit VT. Et intelligatur portio secari per axem plano ACB, recto ad liquidi superficiem. dividatur autem axis DC in E ita ut pars EC reliquae sit dupla, eritque E centr. gravitatis conoidis ACB, hoc enim a Comman-

„insidebit recta, ita ut axis ipsius secundum perpendicularem constituatur". (Heiberg, T. II, p. 372).

[23]) „*c.* theor. 7." [Huygens].

[24]) Inutile de faire remarquer que BD est inférieur ou égal au rayon de courbure du sommet B de la parabole ou hyperbole EBC.

[25]) C'est-à-dire „les trois quarts".

[26]) Huygens annota en marge: „*a.* latus rectum conoidis appello id quod est latus rectum paraboles quae fit si conoides secetur plano per axem vel axi parallelo, omnes enim sectiones hae exhibent eandem parabolen." [Comparez la pièce N°. IX, à la page 52 du Tome présent]. „Ea autem quae Archimedi appellatur adjecta axi, dimidium est lateris recti".

Ajoutons qu'on doit lire ici „quae usque ad axem", au lieu de „adjecta axi", puisque Archimède réserve cette dernière expression: „*ποτεοῦσα τῷ ἄξονι*" au cas de la conoïde hyperbolique, où elle indique le demi-diamètre de l'hyperbole méridien. (Comparez T. I, p. 278 et 279 de l'édition de Heiberg). La ligne que Huygens a en vue et qui se rencontre dans le cas de la conoïde parabolique est appelée par Archimède „*τὰ μέχρι τοῦ ἄξονος*" (Comp. Heiberg, T. I. p. 304) ce qui se traduit chez Commandin par „quae usque ad axem", expression

dino demonstratum est [28]). porro secetur VT bifariam in M, et ducatur MS parallela DC, eritque ea axis partis mersae VST, aequalis axi RC partis FCG [b 29]), quia partes ipsae sunt aequales [c 30]). Item dividantur MS, RC in I et L, sicut axis DC divisus fuit in E, eruntque I et L centra gravitatis partium VST, FCG. Per I ducatur NI parallela VT, in eamque ex E cadat perpendicularis EK [31]).

eidem VT ducatur parallela SQ, quae ideo continget sectionem ACB in puncto S [d 32]). Sit item KX parallela axi DC, et XO parallela KE: et jungantur IL et SC, quae similiter inter se parallelae erunt, eo quod LC, IS sunt aequales, utpote subsesquialterae [33]) axium aequalium RC, MS. Est igitur triangulus OXQ triangulo EKN similis et aequalis, ideoque latus OX aequale lateri EK, et latus OQ

---

qu'on retrouve dans le théorème de la note 27 et dans quelques autres théorèmes cités dans les notes suivantes.

Voir d'ailleurs le „Commentarius" de Commandin à la page 11 verso de l'ouvrage cité dans la note 4, où on lit: „Linea, quae usque ad axem apud Archimedem, est dimidia eius, juxta quam possunt, quae à sectione ducuntur; ut ex quarta propositione libri de conoidibus, & spheroidibus apparet. cur uero ita appellata sit, nos in commentariis in eam editis tradidimus". Consultez pour ces derniers commentaires la page 30 recto des „Commentarii" qu'on trouve dans l'ouvrage: „Archimedis Opera non nulla à Federico Commandino Urbinate nuper in Latinum conversa, et commentariis illustrata. Quorum nomina in sequenti pagina leguntur. Cum privilegio in annos X. Venetiis, apud Paulum Manutium, Aldi F. MDLVIII." 4°.

[27]) Théorème correspondant à la Prop. II Libr. II, p. 10 recto, de l'édition de Commandin, citée dans la note 4: „Recta portio conoidis rectanguli, quando axem habuerit minorem, quam sesquialterum" [$\frac{3}{2}$] „eius, quae usque ad axem" [voir la note 26] „quamcunque proportionem habens ad humidum in gravitate; demissa in humidum, ita ut basis ipsius humidum non contingat; & posita inclinata, non manebit inclinata; sed recta restituetur. Rectam dico consistere talem portionem, quando planum quod ipsam secuit, superficiei humidi fuerit aequidistans". (Heiberg, T. II, p. 376). On remarquera que la démonstration qui va suivre diffère de celle suppléée par Commandin.

[28]) Aux pages 41 verso—45 recto de l'ouvrage suivant: Federici Commandini Urbinatis Liber de Centro Gravitatis Solidorum. Cum privilegio in annos X. Bononiae, Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV". 4°.

[29]) „*b* pr. 25. Archim. de Conoid." [Huygens]. Il s'agit de la Prop. XXV, p. 41 recto de l'édition de Commandin, citée vers la fin de la note 26: „Si rectanguli conoidis duae portiones abscindantur; altera quidem plano super axem erecto, altera autem non erecto: et sint portionum axes aequales: ipsae quoque portiones aequales erunt" (c'est la Prop. XXIII de l'édition de Heiberg, p. 405 du T. I.).

[30]) „*c* Theor. 4, lib. 1." [Huygens]. Voir le „Theorema 4" p. 100 du Tome présent; theorème qui équivaut à la loi d'Archimède.

[31]) Dès lors il ne s'agira plus que de prouver qu'on a EK > EL.

[32]) „*d* per conv. prop. 5 lib. 2 Con." [Huygens]. Voici cette proposition, telle qu'on la trouve à la page 45 verso de l'édition des „Coniques" d'Apollonius, citée dans la pièce N°. 5, note 4 (p. 6 du T. I): „Si parabolae, uel hyperbolae diameter lineam quandam bifariam secet; quae ad terminum diametri contingit sectionem aequidistans est lineae bifariam sectae".

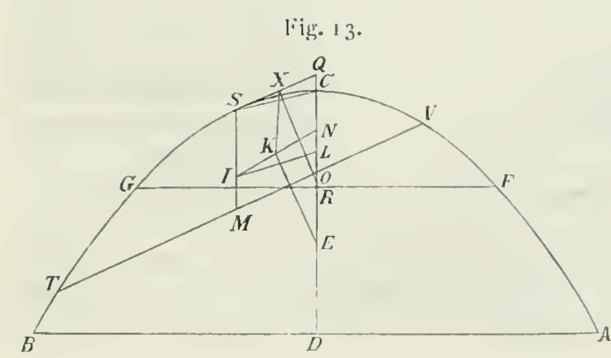
[33]) C'est-à-dire: deux troisièmes.

lateri EN; sed et lineae CQ, LN aequales sunt, propter triangula CSQ, LIN similia et aequalia; ergo auferendo aequalia ab aequalibus, remanet OC aequalis EL. Quia autem DC minor est $\frac{3}{4}$ lateris rectis, et EC est $\frac{2}{3}$ DC, erit EC minor quam $\frac{6}{12}$ sive $\frac{1}{2}$ lateris recti; ergo EL sive OC multo minor dimidio lateris recti: quare OX (etiamsi in circumferentia sectionis terminari dicatur) major erit quam OC[34]. Igitur et EK major quam EL. Quia autem NI transit per I centr. gr. partis VST et parallela est superficiei liquidi VT, sequitur lineam EK quae in eam perpendicularis est, esse altitudinem centri grav. portionis totius, supra centrum gravitatis partis mersae VST. EL autem similiter est altitudo centri gr. totius portionis supra centrum gr. partis mersae FCG: Igitur quia EK major EL, altitudo centri grav. totius portionis supra centr. grav. partis mersae major esset situ portionis secundo, motâ videlicet portione, quam fuerat situ primo, cum staret recta, quod est contra Theor. 6 h. lib. Quum itaque absurdum sit portionem ad ullam partem inclinatam dicere, necessario recta consistet; quod erat demonstr.

Theorema 11.

Recta portio Conoides parabolici, si axem habuerit minorem quam subsesquitertium lateris recti, et ad liquidum in gravitate portionem quamcunque: liquido supernatans demersâ base, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari. [35])

Fig. 13.



Repetatur figura praecedens sed inversa, jamque pars mersa sit BGFA, sitque portio posita situ recto, adeo ut axis CD perpendicularis sit ad liquidi superficiem GF. dico portionem BCA ita positam necessario consistere.

Si enim fieri potest inclinetur, ita ut jam superficies sit TV. Igitur constructis reliquis ut suprà, demonstrabitur eisdem verbis EK majorem esse quam EL. unde repugnat

---

34) „*e* Lemm. praec." [Huygens].

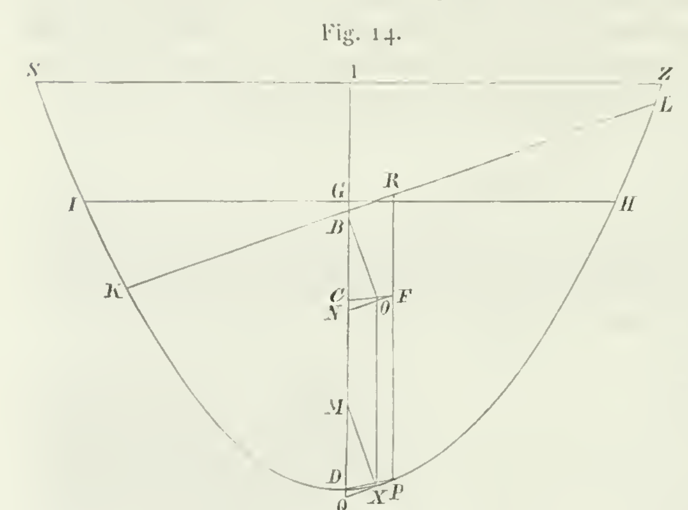
35) Théorème correspondant à la Prop. III, Libr. II, p. 12 verso, de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli quando axem habuerit minorem, quam sesquialterum" [$\frac{3}{2}$] „eius quae usque ad axem, quamcunque proportionem habens ad humidum in grauitate; demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido; & posita inclinata, non manebit inclinata, sed ita restituetur, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat". (Heiberg, T. II, p. 378).

Theoremati 7. h. lib. ut portionem motam dicamus, quum prius LE fuerit altitudo centri grav. partis enatantis fupra centr. gr. totius portionis, poftea vero ea altitudo fit KE. Confiftet igitur portio: quod erat dem.

Theorema 12.

Recta portio Conoidis parabolici axem habens majorem tribus quartis lateris recti, fi in gravitate ad liquidum majorem habeat rationem eâ quam habet quadratum quod fit ab exceffu axis fupra tres quartas lateris recti, ad quadratum axis; fupernatans liquido demerfo vertice confiftet axe ad liquidi fuperficiem perpendiculari. [36])

Fig. 14.



Sit haec Conoidis portio SDZ, liquido fupernatans, et pofita recta, ita ut liquidi fuperficies fit IH, ponendo videlicet portionem ad liquidum in gravitate eam habere rationem quam habet pars IDH ad totum, quae ratio major fit eâ quam habet quadratum exceffus axis AD fupra tres quartas lateris recti, ad quadr. AD: dico portionem ita pofitam neceffario confiftere.

Nam fi fieri poteft inclinet ad aliquam partem, ut jam liquidi fuperficies fit KL; et portio per axem fecari intelligatur plano SDZ, recto ad liquidi fuperficiem. dividatur autem KL bifariam in R unde ducatur RP parallela AD, eritque RP axis partis KPL, eademque aequalis axi GD partis IDH[a] [37]) quia partes ipfae IDH, KPL funt aequales[b] [38]). Et fit B centrum grav. portionis totius SDZ; C centr. grav.

[36]) Théorème correspondant a la Prop. IIII Libr. II, p. 13 recto de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli, quando fuerit humido leuior, & axem habuerit maiorem, quàm sesquialterum eius, quae usque ad axem: si in grauitate ad humidum aequalis molis non minorem proportionem habet ea, quàm quadratum, quod fit ab excessu, quo axis maior est, quàm sesquialter eius, quae usque ad axem, habet ad quadratum, quod ab axe; demissa in humidum, ita ut basis ipsius humidum non contingat; & posita inclinata, non manebit inclinata, sed recta restituetur". (Heiberg, T. II, p. 379).

[37]) „*a* pr. 25. Archim. de Conoid." [Huygens]. Voir la note 29.

[38]) „*b* pr. 4. h. lib." [Huygens]. Comparez la note 30.

partis IDH, et F partis KDL, perque hoc ducatur FN parallela KL, et in FN cadat perpendicularis BO. Porro ducatur PQ parallela LK vel ipſi FN, ac proinde contingens ſectionem in P. Item ſiat OX parallela axi AD, et XM parallela OB; et denique jungantur PD et FC, quae ſimiliter inter ſe parallelae erunt, quoniam CD, FP ſunt aequales, utpote ſubſeſquialterae [33]) axium aequalium GD, RP.

Sunt igitur trianguli BNO, MQX ſimiles et aequales, ideoque latus MX aequale lateri BO, et MQ aequale BN, verum et lineae DQ, CN ſunt aequales propter triangulos ſimiles et aequales CFN, DPQ; ergo auferendo aequalia ab aequalibus manent MD, BC aequales. Porro quia ſicut portio ad liquidum in gravitate ita eſt pars merſa IDH ad totam[c 39]) portionem, et ita quadratum axis GD ad quadratum axis AD[d 40]), ſequitur quadr. GD ad quadratum AD quoque majorem habere rationem quam quadratum exceſſus axis AD ſupra $\frac{3}{4}$ lateris recti habet ad quadr. AD: ergo quadratum GD majus quadrato exceſſus axis AD ſupra tres quartas lateris recti, ideoque GD major exceſſu axis AD ſuprà tres quartas lateris recti. ſed GD eſt exceſſus axis AD ſuprà AG, ergo AG minor eſt tribus quartis lateris recti. quum autem centra grav. axes portionum ſimiliter dividant, eſt AD ad BD ut GD ad CD, et permutando AD ad GD ut BD ad CD, et dividendo [41]), et permutando AD ad BD ut AG ad BC: ſed AD eſt $\frac{3}{2}$ BD, ergo et AG eſt $\frac{3}{2}$ BC; ergo quum AG ſit minor oſtenſa $\frac{3}{4}$ lateris recti, erit BC minor $\frac{2}{4}$ ſive $\frac{1}{2}$ lateris recti. MD autem oſtenſa fuit aequalis BC, ergo et MD minor dimidio latere recto: quamobrem MX (etiamſi terminari dicatur ad ſectionis circumferentiam) major erit quam MD[e 42]). ideoque BO, quae ipſi MX aequalis eſt, major quam BC, quae aequalis eſt ipſi MD. Hoc autem abſurdum eſt; nam quoniam poſteriori portionis poſitione linea BO eſt altitudo centri grav. totius portionis ſupra centrum grav. partis merſae, eaque altitudo priori poſitione eſt BC, deberet BO minor eſſe quam BC[f 43]). Non poteſt itaque portio ad partem ullam inclinare, ſed recta conſiſtet; quod erat demonſtrandum.

---

39) „*c* pr. 4 h. lib." [Huygens].

40) „*d* Prop. 26. Archim. de Conoid." [Huygens]. Il s'agit de la Prop. XXVI, p. 41 verso de l'édition de Commandin: „Si rectanguli conoidis duae portiones abscindantur planis quomodocunque ductis: portiones eandem inter sese proportionem habebunt, quam ipsarum axium quadrata". (C'est la Prop. XXIV de l'édition de Heiberg, p. 411 du T. I).

41) Sur l'expression „dividendo", comparez la note 10.

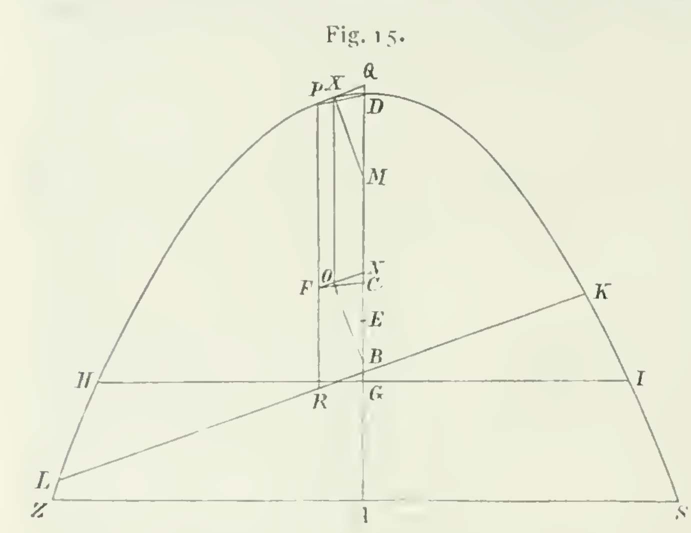
42) „*e* Lemm. 1 h. lib." [Huygens].

43) „*f* Theor. 6 h. lib." [Huygens].

Theorema 13.

Recta portio Conoidis parabolici axem habens majorem tribus quartis lateris recti, si in gravitate ad liquidum minorem habeat rationem eâ quam habet id quo quadratum axis majus est quadrato quod fit ab excessu axis supra tres quartas lateris recti, ad quadratum axis; liquido supernatans demersâ base, consistet axe ad liquidi superficiem perpendiculari. [44])

Fig. 15.



Sit haec portio SDZ, quae liquido supernatet demersâ base, et posita sit recta ita ut axis DA sit perpendicularis ad liquidi superficiem, quae sit IH, ponendo videlicet rationem partis IHZS ad totam portionem esse minorem eâ ratione de qua dictum: dico portionem ita positam consistere.

Si enim fieri potest inclinet, ut jam liquido superficies sit LK. Et construantur omnia ut in Theoremate praecedenti; praetereaque ponatur AE aequalis tribus quartis lateris recti.

Quoniam itaque AE aequalis est tribus quartis lateris recti, apparet proportionem quam portio habet ad liquidum in gravitate minorem esse eâ quam habet differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD. Est autem pars mersa IHZS ad totam portionem, sicut portio ad liquidum in gravitate [a 45]), ergo pars mersa IHZS ad portionem totam minorem habet rationem quam differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD. quia verò pars IDH est ad portionem

---

[44]) Théorème correspondant à la Prop. V Libr II, p. 15 recto, de l'édition de Commandin: „Recta portio conoidis rectanguli, quando leuior humido axem habuerit maiorem, quàm sesquialterum" [$\frac{3}{2}$] „eius, quae usque ad axem; si ad humidum in gravitate non maiorem proportionem habeat, quàm excessus, quo quadratum quod fit ab axe maius est quadrato, quod ab excessu, quo axis maior est, quàm sesquialter eius, quae usque ad axem, ad quadratum, quod ab axe: demissa in humidum, ita ut basis ipsius tota sit in humido; & posita inclinata non manebit inclinata, sed restituetur ita, ut axis ipsius secundum perpendicularem fiat" (Heiberg, T.II, p. 383).

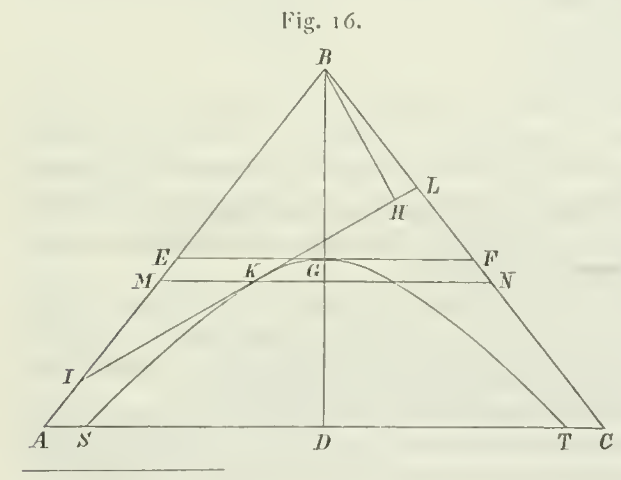
[45]) „a Theor. 4. h. lib." [Huygens].

SDZ ut quadratum GD ad quadr. AD [b] 46), est etiam dividendo 41) pars IHZS ad portionem SDZ ut differentia quadratorum AD, GD ad quadratum AD; ergo quum pars IHZS ad portionem SDZ minorem habeat rationem quam differentia quadratorum AD, ED ad quadratum AD, apparet hanc differentiam quadratorum AD, ED majorem esse differentiâ quadratorum AD, GD; ergo linea GD major quam ED, et AG minor AE, id est tribus quartis lateris recti; unde rursus ut in demonstratione Theorematis praec. ostendi potest lineam BO majorem esse BC, quod est absurdum. nam quum BO sit hic altitudo centri gravitatis partis enatantis supra centrum grav. portionis totius situ portionis posteriori, eaque altitudo priori situ fuerit BC, deberet BO minor esse quam BC [c] 47). Non potuit itaque portio ultro inclinari, ideoque recta consistit quod erat demonstrandum.

Lemma 2. 48)

Esto Conus plano ABC sectus per axem BD. sumptoque in axe puncto G, eo vertice descripta sit hijperbole ad asymptotos BA, BC. Et intelligatur praeterea conus secari planis EF, et IL, rectis ad planum ABC, ita ut hujus quidem sectionis maxima diameter IL contingat hijperbolen in puncto K, alterius autem diameter EF eandem contingat in vertice G. dico portiones coni abcissas EBF, IBL aequales esse.

Fig. 16.



Ducatur per contactum K linea MKN parallela AC, sitque BH ad IL perpendicularis.

Manifestum est sectionem EF circulum esse, IL autem esse ellipsin; cujus maxima diameter IL quum hijperbolen contingat, bifariam ideo secatur ad contactum in K [a] 49); dimidiumque minoris diametri ejusdem ellipseos (quod diversum non est ab ordinatim applicata in sectione circulari MN) poterit rectan-

46) „*b* pr. 26 Archim. de Conoid". [Huygens]. Comparez la note 40.

47) „*c* Theor. 7. h. lib." [Huygens].

48) Huygens, ayant achevé de retrouver à l'aide du principe formulé dans les théorèmes 6 et 7 les conditions, données par Archimède, de la stabilité de l'équilibre d'un segment de conoïde parabolique, flottant avec son axe dans la direction verticale, laisse de côté les beaux théorèmes d'Archimède qui se rapportent à la flottation des mêmes segments dans une position inclinée. Il procède à appliquer le même principe à d'autres corps flottants et commence à cet effet par préparer, au moyen du lemme qui va suivre, la solution du cas du cône de révolution.

49) „*a* prop. 3. lib. 2. Conic." Voir, à la page 44 verso des „Coniques", ouvrage cité p. 6 du

gulum MKN; hoc vero rectangulum aequale eſt quartae parti figurae[b 50]), ſive quadrato EG[c 51]), igitur tota minor diameter ellipſeos aequalis eſt lineae EF, ellipſis itaque IL eſt ad circulum EF, ſicut diameter IL ad diametrum EF[d 52]): et quum abſciſſor coni IBL ad conum EBF habeat proportionem compoſitam ex proportione baſium ellipticae ad circularem, et ex proportione altitudinum, componetur ideo dicta proportio abſciſſoris IBL ad conum EBF, ex proportione lineae IL ad EF et ex proportione altitudinis BH ad altitudinem BG. Verum et triangul. IBL ad triangulum EBF habet proportionem compoſitam ex dictis proportionibus, nimirum ex proportione baſium IL ad EF, et altitudinum BH ad BG; ergo abſciſſor IBL est ad conum EBF, ſicut triangulus IBL ad triangulum EBF. Ei autem trianguli sunt aequales (quoniam id quod continetur lateribus IB, BL, aequale eſt ei quod continetur lateribus EB, BF,[e 53])) ergo et abſciſſor IBL aequalis eſt cono abſciſſo EBF, quod erat ostendendum.

T.I: „Si hyperbolen contingat recta linea, cum utraque asymptoton conveniet, & ad tactum bifariam secabitur: quadratum uero utriusque eius portionis aequale erit quartae parti figurae, quae ad diametrum per tactum ductam constituitur".

[50]) „b prop. 10. lib. 2. Conic." Voir à la page 46 verso des „Coniques" (éd. Comm.): „Si recta linea sectionem secans cum utraque asymptoton conveniat; rectangulum contentum rectis lineis, quae inter asymptotos & sectionem interiiciuntur, aequale est quartae parti figurae factae ad diametrum, quae aequidistantes ipsi ductae lineae bifariam dividit."

[51]) „c prop. 1. lib. 2. Conic." Voir à la page 43 verso: „Si hyperbolen recta linea ad verticem contingat: & ab ipso ex utraque parte diametri sumatur aequalis ei, quae potest quartam figurae partem: lineae, quae à sectionis centro ad sumptos terminos contingentis ducuntur, cum sectione non convenient".

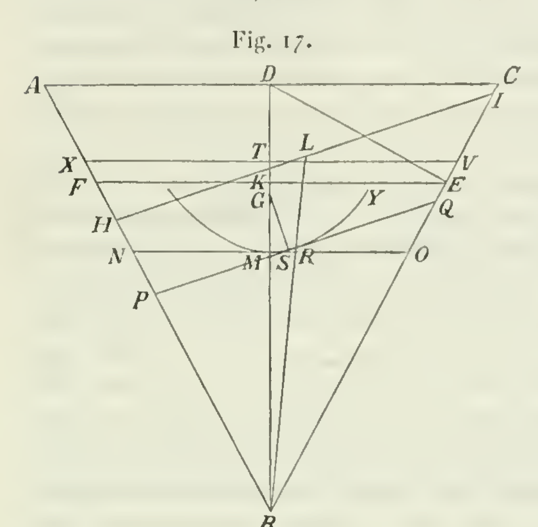
[52]) d prop. 7. Archim. de Conoid." Il s'agit de la prop. VII, p. 31 verso de l'édition de Commandin, citée vers la fin de la note 26: „Spatia acutianguli coni sectione contenta eam inter se se proportionem habent, quam quae fiunt ex coni acutianguli sectionum diametris rectangula." (C'est la prop. VI de l'édition de Heiberg, p. 315 du T.I).

[53]) „e prop. 43. lib. 3. Conic." Voir à la page 94 verso des „Coniques" (ed. Comm.) „Si hyperbolen recta linea contingat, abscindet ex asymptotis ad sectionis centrum lineas continentes rectangulum aequale ei, quod continetur lineis ab altera contingente abscissis ad uerticem sectionis, qui est ad axem".

THEOREMA 14.

Conus isosceles si in gravitate ad liquidum non minorem habeat rationem quam duplicatam cubi axis ad cubum lateris; liquido supernatans demerso vertice consistit axe ad liquidi superficiem perpendiculari. [54])

Esto conus ABC, axem habens BD, et ductâ DE perpendiculari ad unum è lateribus BC, fiat planum EF basi AC parallelum, eritque conus FEB ad conum ACB in duplicata proportione cubi axis BD ad cubum lateri BC; nam quia trianguli DEB, EKB sunt rectanguli, habentque communem angulum ad B, erunt similes, ideoque latera KB, BE, BD proportionalia; itaque KB ad BD est in duplicata proportione KB ad BE sive DB ad BC, et cubus lineae KB ad cubum BD, sive conus FBE ad conum ABC in duplicata proportione cubi axis DB ad cubum lateris BC.



Cono ABC igitur in liquidum demisso, positoque axe DB ad perpendiculum, demergatur conus XBV; et quoniam pars mersa est ad totum sicut conus ad liquidum in gravitate, coni autem ad liquidum in gravitate non minor ponitur proportio quam duplicata cubi axis ad cubum lateris, id est non minor eâ quam habet conus FBE ad conum ABC, manifestum est conum demersum XBV non minorem fore cono FBE. dico autem conum ABC ita positum consistere. Nam si potest inclinet ad aliquam partem, ita ut liquidi superficies jam sit HI: et intelligatur conus secari per axem plano ABC recto ad liquidi superficiem; sitque G centrum grav. coni ABC; M centr. gr. coni XBV, et R abscissoris HBI, cujus axis sit BRL. porro fiat planum NMO basi AC parallelum, et planum PRQ parallelum plano HI; et cadat in diametrum PQ perpendicularis GS. [55])

Quum igitur puncta M et R quae sunt centra grav. portionum XBV, HBI, axes TB, et LB similiter dividant, erit conus XBV ad conum NBO, sicut abscissor

[54]) La condition de la stabilité de l'équilibre d'un cône de révolution flottant, l'axe étant dans la situation verticale avec le sommet en bas, fut publiée pour la première fois, par Daniel Bernoulli, dans les Comment. Acad. Petrop. de l'année 1738, p. 163. Elle est identique avec celle de Huygens, d'après laquelle la stabilité de l'équilibre exige que la densité relative du cône, par rapport à celle du fluide, excède ou égale la valeur $BD^6 : BC^6$.

[55]) D'après le „Theorema 6" il suffira donc dès lors de prouver qu'on a GS > GM. Ajoutons qu'en janvier 1652 Huygens a essayé de substituer à la démonstration qui va suivre, une autre que l'on trouvera dans l'Appendice II du traité présent.

HBI ad abſciſſorem PBQ, et commutando; quare ſicut conus XBV ſectori HBI aequalis, ita et conus NBO aequalis absciſſori PBQ. Si igitur deſcribatur hijperbole MRY vertice M, et ad aſymptotos BA, BC, eam continget linea PQ [a 56]) et quia PQ ad contactum biſariam dividi debet [b 57]), ſicut dividitur à puncto R, manifeſtum eſt punctum R fore punctum contactus. Porro quum BM ſit ad BT ut BG ad BD (centra enim gravitatis M et G, axes BT et BD ſimiliter dividunt) eſt quoque commutando ſicut BT ad BD ita BM ad BG: BT autem ad BD non minorem habet rationem quam BK ad eandem BD, ſive quam quadratum BK ad quadratum BE, ergo et BM ad BG non minorem habet rationem quam quadratum BK ad quadratum BE, ſive quam quadratum BM ad quadratum BO: quare et dividendo [41]) BM ad MG non minorem quam quadratum BM ad quadratum MO. Eſt autem quadr. MO aequale quartae parti figurae [c 58]), id eſt rectangulo ſub BM et ſub dimidio lateris recti hijperboles MRY; ſed ad hoc rectangulum quadratum BM propter communem altitudinem eam habet rationem quam linea BM ad dimidium lateris recti, ergo quadratum BM eſt ad quadratum MO ſicut linea BM ad dimidium lateris recti. Oſtenſum eſt autem lineam BM ad MG non minorem habere rationem quam quadratum BM ad quadr. MO; ergo linea BM ad MG non minorem habet rationem quam eadem BM ad dimidium lateris recti: Itaque MG non major dimidio latere recto. Unde linea GS quae ad tangentem PQ perpendicularis eſt (etiamſi ad hijperboles circumferentiam terminari dicatur) major eſt quam GM [d 59]); quod eſt abſurdum; nam quoniam linea GS poſteriori coni poſitione eſt altitudo centri gravitatis totius coni ſuprà centrum gravitatis partis merſae HBI, eaque altitudo priori poſitione eſt GM, deberet GS minor eſſe quam GM [e 60]). Non poteſt itaque conus inclinare ad ullam partem, quare rectus conſiſtet, quod erat demonſtrandum.

Theorema 15.

Conus iſoſceles ſi in gravitate ad liquidum non majorem proportionem habuerit eâ quam habet exceſſus cubi lateris ſupra cubum lineae, quae ſit ad axem ut axis ad coni latus, ad cubum lateris; liquido ſupernatans demerſâ baſe, conſiſtit axe ad ſuperficiem liquidi perpendiculari. [61])

Repetatur figura praecedens, et invertatur; et habeat conus ad liquidum in

56) „*a* lemm. praeced." [Huygens].

57) „*b* prop. 3. lib. 2. Conic." [Huygens]. Comparez la note 49.

58) On retrouve en marge le signe de renvoi „*c*"; mais la citation manque. Elle pouvait être identique avec celle de la note précédente; et c'est peut-être la raison qu'elle a été supprimée.

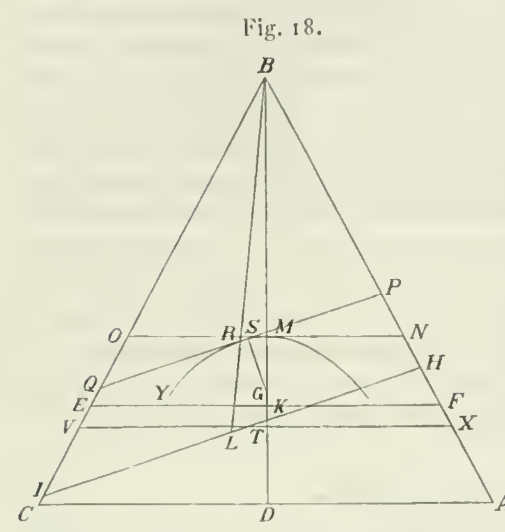
59) „*d* lemm. 1 h. lib." [Huygens]. Voir la page 106.

60) „*e* Theor. 6. h. lib." [Huygens].

61) La condition de stabilité exige donc que la densité relative δ du cône soit plus petite que, ou

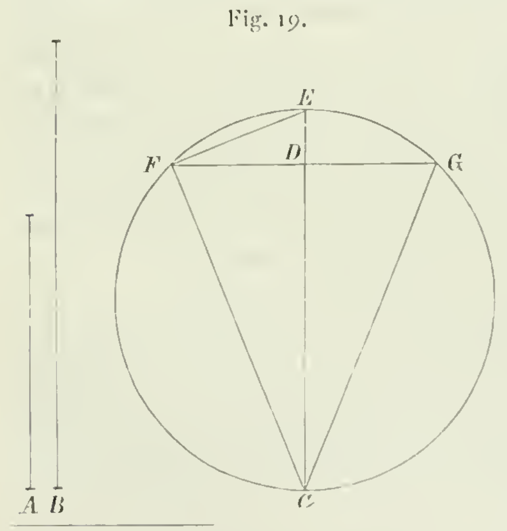
gravitate proportionem quam habet portio CVXA, non major CEFA, ad conum integrum ABC; quae proportio propterea non major erit eâ de qua dictum, nempe quam habet differentia cuborum AB, FB ad cubum AB: portio enim CVXA eſt ad conum ABC ut differentia cuborum AB, XB, ad cubum AB, quae minor eſt proportio quam differentiae cuborum AB, FB ad cubum AB. demiſſo itaque cono ABC in liquidum, axe ad liquidi ſuperficiem recto, portio demerſa erit CVXA, quia haec eſt ad conum ABC ſicut idem ad liquidum in gravitate. Oſtendendum eſt autem conum ita poſitum conſiſtere.

Fig. 18.



Si poteſt inclinet, ut jam ſuperficies liquidi ſit IH. Conſtat igitur ex demonſtratione Theorematis praec. lineam GS majorem eſſe quam GM. verum id hic quoque abſurdum eſt; nam quia GS poſteriori coni poſitione eſt altitudo centri gravitatis partis enatantis IBH ſuprà centrum gravitatis totius coni, eaque altitudo priori poſitione eſt GM, deberet GS major eſſe quam GM[a 62]). Abſurdum itaque eſt dicere conum inclinaſſe; ergo rectus conſiſtet, quod erat demonſtr.

Fig. 19.



Propos. 16. Problema 1.

Datâ proportione cujuſvis materiae ſolidae quam ad liquidum habet in gravitate, conum ex eâ facere, qui in liquidum demiſſus vertice demerso rectus conſiſtat.

Data ſit proportio materiae ad liquidum in gravitate, quae eſt lineae A ad B.

Inveniantur inter A et B duae mediae proportionales, quae ſint CD, CE; et

égale à, $1 - \frac{BD^6}{BA^6}$. Comme on le voit facilement, il y a des cas $\left(\frac{BD^6}{BA^6} > \frac{1}{2} ;\ 1 - \frac{BD^6}{BA^6} < \delta < \frac{BD^6}{BA^6}\right)$, où l'équilibre du cône flottant ne peut être stable dans aucune des deux situations qui sont compatibles avec la direction verticale de l'axe; mais Huygens se contente d'avoir donné les conditions de la stabilité pour la position verticale et ne s'occupe pas de la flottation dans des positions inclinées.

62) „*a* Theor. 7. h. lib." [Huygens].

fiat circulus diametro CE, ductâque FDG quae dictam diametrum CE fecet in D ad angulos rectos, jungantur CF, CG, dico conum FCG esse qui quaerebatur.

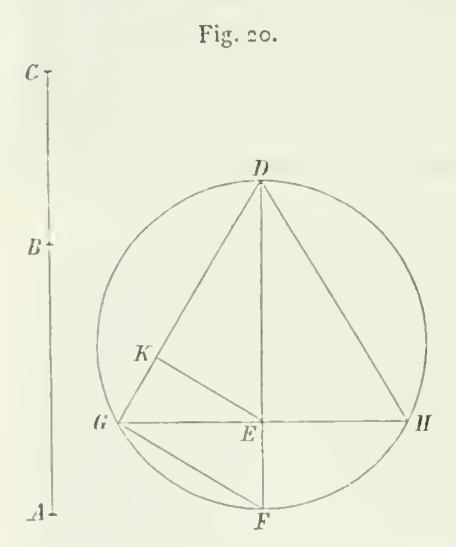
Jungatur enim FE. Sunt igitur CD, CF, CE, continuè proportionales, quare CD ad CE in duplicata proportione CD ad CF; est autem ut CD ad CE sic A ad CD, igitur A ad CD quoque in duplicata proportione CD ad CF; unde et cubus A ad cubum CD in duplicata proportione cubi CD ad cubum CF. cubus autem A ad cubum CD est in triplicata proportione lineae A ad CD; quod idem est ac si dicamus cubum A esse ad cubum CD, sicut est linea A ad B, (nam A est ad B in triplicata ratione A ad CD, quum B sit quarta proportionalium in ratione eâdem;) Igitur A ad B, id est conus FCG ad liquidum in gravitate, est in duplicata proportione cubi axis CD ad cubum lateris CF. Quare si conus FCG demittatur in liquidum demerso vertice, consistet rectus [a] [63]), qualem invenire oportebat.

Manifestum autem est, omnes ex data materia conos, quorum angulus ad verticem aequalis vel major erit angulo FCG similiter rectos consistere debere.

Propositio 17. Problema 2.

Datâ proportione cujusvis materiae solidae quam ad liquidum habet in gravitate, conum ex eâ facere qui in liquidum demissus demersâ base, rectus consistat.

Fig. 20.



Sit data proportio quae est lineae AB ad AC. Inveniantur inter earum differentiam quae est CB et ipsam AC duae mediae proportionales DE et DF. factoque circulo ad diametrum DF, ducatur HEG quae diametrum DF secet ad angulos rectos in E, et jungantur DH, DG. dico conum HDG esse quem invenire oportebat. Jungantur enim FG, et sit EK ad latus DG perpendicularis.

Sunt igitur FG, EK parallelae, ideoque ut DE ad DF, sive ut CB ad DE ita DK ad DG: cubus autem DK ad cubum DG est in triplicata ratione lineae DK ad DG, ergo etiam in triplicata ratione lineae CB ad DE. ratio autem triplicata CB ad DE, est ea quam CB habet ad CA, (quia CA est quarta proportionalis in ratione CB ad DE;) igitur cubus DK ad cubum DG est ut linea CB ad CA: et dividendo, differentia cuborum DK, DG ad cubum DG sicut AB ad AC, id est

---

[63]) „*a* Theor. 14. h. lib." [Huygens].

ſicut conus HDG ad liquidum in gravitate. Conus itaque HDG ad liquidum in gravitate non majorem habet proportionem ſed eandem quam exceſſus cubi lateris ſuprà cubum lineae quae eſt ad axem ut axis ad coni latus, habet ad cubum lateris; ideoque in liquidum demiſſus demerſa baſe, conſiſtet axe ad liquidi ſuperficiem recto [a] [64]), ut oportebat.

Similiter vero recti conſiſtent omnes coni ex iſta materia, quorum angulus ad verticem aequalis vel major erit angulo HDG.

---

[64]) „*a* Theor. 15. h. lib." [Huygens].

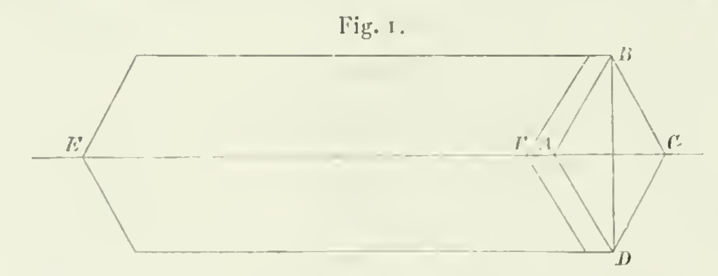
DE IIS QUAE SUPERNATANT LIQUIDO

LIBER 2. [1])

De Parallelepipedis.

Certum quidem eſt ſuperficiebus nullam tribui poſſe gravitatem, cumque nihilominus videamus Geometras [2]) earum gravitatis centra investigare, hoc illos eò facere intelligimus, quòd determinatis hiſce centris in quocunque plano, non referat in quantam altitudinem idem ducatur, [3]) Similis autem conſideratio locum habet in hujuſce libri Theorematis, et ſciendum, rectangula quae propo-

Fig. 1.



nuntur, baſes eſſe parallelepipedorum, quorum longitudo ad arbitrium ſingi poſſit. Ita quod demonſtratum eſt de quadrato ABCD, ſubduplam habente pro-

[1]) Dans le livre qui suit, Huygens, après une courte introduction de portée plus générale, s'applique à donner une solution aussi complète que possible des problèmes qui se rattachent à l'équilibre d'un parallélipipède rectangle flottant dont les arêtes longitudinales restent parallèles au niveau du liquide. Il débute par discuter les conditions pour lesquelles cette supposition sera remplie.

[2]) Le manuscrit fait précéder au mot „Geometras" les mots biffés: „Archimedem et aliosque."

[3]) Le manuscrit ajoute encore les mots suivants, biffés depuis: quum semper hoc modo corpus efficiatur, cujus centrum gravitatis futurum sit in rectâ, quae jungit centra gravitatis oppositarum basium."

portionem ad liquidum in gravitate, illud liquido impositum ad perpendiculum, ita sponte suâ componi, ut media pars ADC demergatur; idem affirmari credatur de parallelepipedo cujuslibet longitudinis ut AE, quod quadratum basin habeat et in gravitate ad liquidum subduplam proportionem. Ubi notandum, quòd etiamsi exigua tantùm, respectu basis, fuerit altitudo seu longitudo parallelepipedi, ut FA, vel minor etiam, tamen illud consistet lateribus FA et reliquis superficiei liquidi parallelis, modò ita impositum sit; neque enim erit cur magis in hanc quàm in illam partem procumbat. Et hoc quidem Geometricè loquendo: Caeterum experienti aliud eveniet; namque hoc parallelepipedum altitudinis AF, proculdubio ad alterutram partem inclinabit, donec planum basis ABCD superficiei liquidi fiat parallelam: quamobrem qui simili parallelepipedo experimentum capere volet sequentium Theorematum, ita illud continere debebit ut planum basis ABCD semper perpendiculare maneat ad liquidi superficiem; [4]) verum qui molestiam hanc effugere volet, is longitudinem parallelepipedi duplam faciat maximae in base diametri, vel tantùm ut ad hanc ratione habeat quam quinque ad tria: Et certus sit hujusmodi parallelepipedi latera, si secundum longitudinem liquido impositum fuerit, semper ejusdem superficie parallela fore. Nam non tantum de parallelepipedo verùm in universum de omni corpore cylindroïdeo, quod basium oppositarum ambitum habet in easdem partes cavum, quo praeter parallelepipe-

---

[4]) Au lieu du passage qui va suivre, jusqu'aux mots: „Nam non tantum" on trouvait primitivement ce qui suit: „quod commodè fieri poterit duobis planis perpendicularibus, quae distent inter se spatio FA. Verùm nihil hisce opus erit si in multam longitudinem extendatur parallelepipedum ut AE, tum enim ultro jacebit, imo et erectum recidet. Sed bene hic interrogabor, quanta igitur longitudo futura sit parallelepipedi, si illud jacere velimus. et puto quidem non majori opùs esse, quàm cujus longitudinis quadratum ad quadratum maximi in base lateris rationem habeat quàm tria ad duo; idque propter Theorema 4tum [lisez: 2dum] ex quo manifestum est tum saltem non majorem requiri, quum ex figurâ basis et conveniente gravitate, parallelepipedum ita liquido supernatat, ut alterum laterum basis ad superficiem liquidi faciat angulos rectos. Verùm si quis metuet ut eadem longitudo sufficiat parallelepipedo, quod contrà sic liquido supernatet ut neutrum laterum basis ad superficiem liquidi perpendiculare sit, velut hoc quod modò propositum fuit, is producat eandem longitudinem donec rationem habeat ad maximum in base diametrum quàm quinque ad tria, et certus sit hujusmodi paralellepipedi longitudinem seu latus, quomodocumque liquido impositum fuerit, semper ejusdem superficiei parallelam mansura."

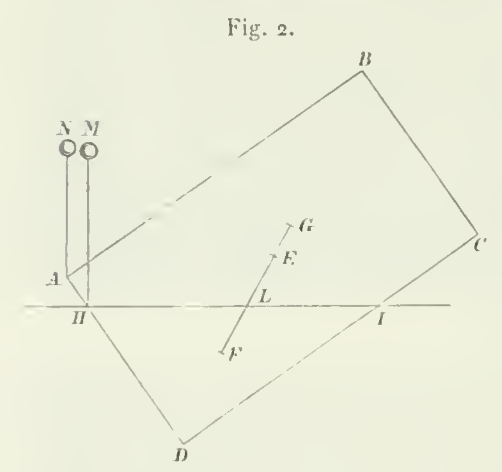
A propos de ces phrases biffées Huygens avait annoté au crayon: „malim haec omnino explorata habere, quàm hic dubiè aliquid afferre."

dum cylindrus quoque et prisma continentur, idem affirmare licet; ejusque certissima est demonstratio, quam tamen hìc afferre visum non fuit, tum quòd caeterorum Theorematum veritas ex eâ non pendeat, tum maximè quòd afferere nolim, non minorem longititudinem omnibus praedictis corporibus sufficere. [5]).

Theorema 1.

Corpus solidum liquido supernatans, non quiescet, nisi cum linea, quae jungit centrum grav. totius corporis cum centro grav. partis mersae, vel enatantis, fuerit perpendicularis ad superficiem liquidi, et si non fuerit perpendicularis, corpus ad eam partem ultro inclinabit ad quam inclinat dicta linea.

Fig. 2.



Sit corpus ABCD supernatans liquido, cujus superficies HI. centrum grav. totius corporis sit E, partis verò mersae F, et enatantis G. linea autem EF vel EG (sunt enim in eâdem rectâ) non sit perpendicularis ad superficiem HI, sed inclinet ad partem C; dico corpus ABCD non quiescere sed inclinare ad eandem partem.

Si [6]) enim fieri potest quiescat, et deinde ita firmari intelligatur ut tantùm circumagi possit ad axem exhibitum puncto L, ubi linea GF intersecatur a liquidi superficie ita ut circa centrum L converti possit.

---

[5]) Nous regrettons toutefois de ne pas posséder cette démonstration et de ne pas avoir réussi à y suppléer.

[6]) La démonstration qui va suivre, et qui avait déjà subi plusieurs altérations, comme l'état du manuscrit le prouve, a fini par ne plus satisfaire à Huygens, puisqu'il l'a biffée après coup. Il est vrai que nous possédons du même „Theorema" une autre démonstration, écrite sur une feuille détachée et que nous avons reproduite dans l'Appendice III. Mais cette démonstration nous semble plutôt antérieure à celle du texte; et même, s'il en était autrement, on en devrait conclure qu'elle a semblé à Huygens encore moins satisfaisante puisque en traçant la figure 2, que nous donnons telle qu'elle était destinée à la publication définitive du traité, (voir la page 90 de l'Avertissement), il est évidemment revenu à la rédaction du texte.

En effet, il y a tout lieu de s'étonner que Huygens, pour autant que nous connaissons ses manuscrits, n'ait pas réussi, ce qu'il a tâché certainement, de rattacher le „theorema" en question aux „theoremata 6 et 7" du „liber 1" et par ce moyen aux hypothèses fondamentales, formulées au commencement du traité.

Avec nos méthodes de raisonnement modernes cela n'aurait pas été difficile. Pour y réussir on n'a qu'à se représenter le corps flottant dans une situation voisine choisie tellement

Si quidem igitur corpus ABCD antea quiescebat, etiam nunc quiescere debebit, (certum enim est in corpore quiescente quotlibet puncta firmari posse, ut tamen illud non commoveatur;) atqui firmato puncto L quia pars mersa HDI levior est liquido suae molis, punctumque L circa quod vertitur non est ad perpendiculum supra centrum suae gravitatis F ideo inquam pars HDI ascendet à parte H nisi impediatur a parte HABCI quae liquido exstat.

Verum pars HABCI quum sustineatur in L, quod non est ad perpendiculum centro suae grav. suppositum, descendere conabitur à parte C, non obstabit igitur motui partis mersae HDI sed eandem juvabit, totumque corpus ABCD ascendet à parte A et descendet a parte C; Itaque firmato corpore circa axem L, opus est duobus ponderibus M et N, (quae manifestò erunt ad eandem partem axis L) ut ne inclinet ad partem C: unde liquet quod eodem inclinabit sublatis hisce ponderibus. Ergo etiam antequam firmaretur circa axem L, non quiescebat, sed inclinabat versus partem C. quod erat demonstrandum.

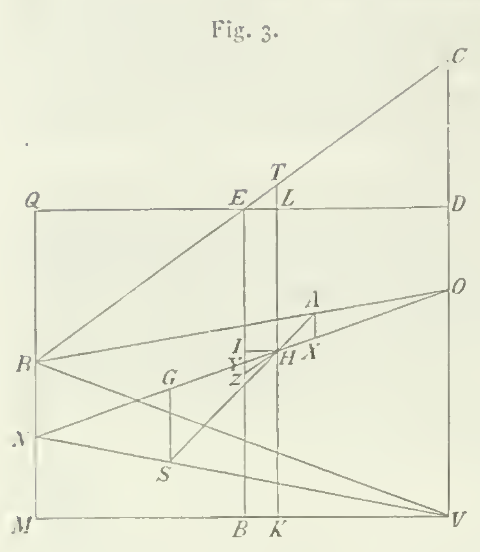
que le point I′ de la nouvelle ligne de niveau se trouve plus près de C que le point I, et H′ plus près de D que H. Alors, en prenant les moments par rapport au plan HI, on voit facilement que le nouveau centre de gravité F′ de la partie immergée DH′I′ ne se sera rapproché ni éloigné du plan HI que d'une quantité infiniment petite du second ordre. Donc, dans la situation de la figure, la différence de niveau de F′ et G sera quasi la même que celle de F et G; mais pour amener le corps flottant dans sa situation nouvelle on devra le faire tourner d'un angle égal à celui de H′I′ avec HI, et dans le même sens. Or, puisqu'il ne s'agit que de la position relative de F′ par rapport à G, on peut tourner autour de G et il est évident qu'alors la différence de niveau entre F′ et G s'amoindrira. Elle sera donc, dans la situation nouvelle, plus petite que celle entre F et G; et, d'après le „Theorema 6" du „liber 1", le corps sera donc libre de se mouvoir dans le sens indiqué.

Et ce même raisonnement nous apprend encore que le plan tangent de la surface, qui est le lieu dans le corps du centre de gravité F de la partie immergée, sera toujours parallèle à la surface de niveau HI. Pour le voir il suffit de remarquer que la droite FF′ (où F′ est pris dans sa situation primitive, c'est-à-dire, avant la rotation autour de G) sera toujours parallèle à la ligne HI, puisque les distances de F et de F′ à HI ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite du second ordre.

Ajoutons que cette dernière propriété dont la découverte fut attribuée à Dupin par M. Paul Appell dans son „Traité de mécanique rationelle" (voir les pp. 192—195. T. 3. de l'édition de 1903, Paris, Gauthier-Villars), fut déjà formulée et démontrée en 1746 par Bouguer aux pages 259 et 270 de son „Traité du navire, de sa construction et de ses mouvemens. à Paris, quay des Augustins, chez Jombert."

Lemma I. [7])

Fig. 3.



Sit rectangulum QV, cujus axis EB, centrum Υ; et ductâ per E, RC, quae jungat latus QM cum producto latere VD, sit trapezii RCVM centrum grav. H; unde ducatur HZ parall. RC lateri obliquo trapezii, et HI perpendicularis in axem EB. dico, ut tripla axis EB est ad DC, ita esse CE ad HZ, et ita quoque DC ad IZ. Item IZ, dividi bifariam à centro rectangi. Υ.

Divisis enim CV et RM bifariam in O et N, ducantur RO et VN, quae erunt diametri triangulorum CRV, RVM. hae rursus dividantur in A et S, ita ut partes ad verticem reliquarum sint duplae, et ducantur AS et NO, quarum haec transibit per Y et H, centra gravitatis rectanguli QV et trapezii RCVM [a 8]). Item ducantur AX, SG parall. EB: eidemque parallela TK, quae transeat per H.

Quia itaque RO et VN sunt diametri triangulorum CRV, RVM, et RA dupla AO, ut et VS dupla SN. sequitur, A et S dictorum triangulorum esse centra grav. ergo SA transit per H, centr. grav. trapezii RCVM; atque ita in H dividitur, ut pars SH ad HA sit ut triang. CRV ad RVM, id est, ut basis CV ad basin RM, ergo etiam GH ad HX, ut CV ad RM; quare etiam ut CV et RM simul ad suam differentiam, id est, ut dupla EB ad duplam DC, sive ut EB ad DC, ita GH et HX simul ad suam differentiam quae est dupla HY, sive, sumpto utrinque dimidio, ita XY ad YH. Sed OY est tripla XY, ergo est tripla EB ad DC, ut OY ad HY, sive ut EC ad TE vel HZ; quod erat primum. Et quia triangula ECD, HZI sunt similia, est quoque ut EC ad HZ, sive ut tripla EB ad DC, ita CD ad IZ; quod erat alterum.

[7]) Avec les trois „lemmata" qui suivent, Huygens va construire, pour ainsi dire, l'échafaudage géométrique dont il aura besoin dans ses recherches sur l'équilibre des parallélipipèdes flottants.

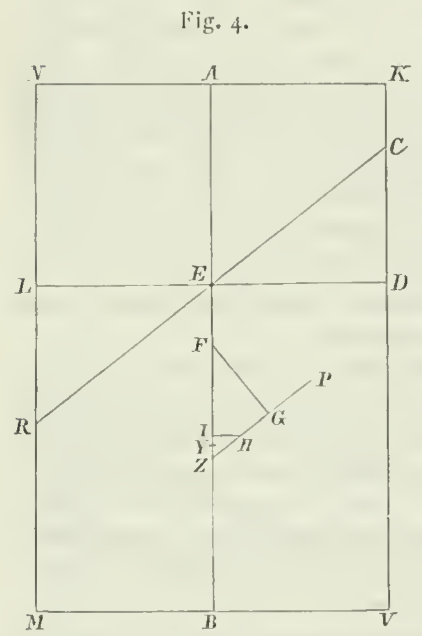
[8]) Huygens annota en marge: „*a* pr. 15. lib. 2. Arch. de aequipond"; mais il s'agit du „lib. 1" de l'ouvrage cité. Comparez la page 183 du Tome 2 de l'édition de Heiberg où la proposition en question est formulée comme il suit: „Cuiusuis trapezii duo latera inter se parallela habentis centrum grauitatis in ea linea positum est, quae media puncta parallelarum iungit, ita diuisa, ut pars eius terminum habens punctum medium minoris parallelarum ad reliquam partem eam habeat rationem, quam habet linea duplici maiori aequalis simul cum minore ad duplicem minorem simul cum majore parallelarum."

Porrò quum Y ſit centr. grav. rectanguli QV, eſt BY dimidia BE; ſed et KH dimidia eſt TK; ergo differentia duarum BY et HK, quae eſt YI, eſt dimidia differentiae TL duarum EB et TK. TL autem manifeſtò eſt aequalis IZ, ergo IY dimidia quoque ipſius IZ; quod erat tertium.

Lemma 2. [9]

Sit Rectangulum KM, à quo abſciſſum ſit rectangulum DM, et trapezium ejuſdem magnitudinis RCVM: agatur autem per H centrum grav. dicti trapezii linea ZHP parallela ejusdem lateri obliquo RC; et demittatur perpendicularis FG ex F centro rectanguli KM in lineam ZP. dico in lineà ZP, partem ZG, interceptam ab hâc perpendiculari et AB axe rectanguli KM, majorem, aequalem aut minorem ſore, parte ZH, intercepta ab eodem axe AB et H centro grav. dicti trapezii; prout ſeſquialterum rectanguli AEB, detracto dimidio quadrato DC, majus, aequale, vel minus erit quartâ parte quadrati baſis MV vel NK id eſt quadrato AK. [10]

Fig. 4.



Sit primò ſeſquialterum rectang.i AEB detracto dimidio quadr. DC majus quadrato AK; dico GZ majorem fore ZH.

Sit enim Y centrum rectang. DM, et ex H cadat in axem perpendicularis HI.

Quum igitur tripla EB ſit ad CD, ut CD ad IZ [a] [11]; erit rectang. ſub triplâ EB et IZ aequale quadrato DC; et rectang. ſub triplâ EB et dimidiâ IZ, quae eſt YZ [b] [12], aequale dimidio quadrato DC. porrò

---

[9] Primitivement le lemme avait été compté comme un théorème; mais les mots „Theorema 2" furent biffés et remplacés par „Lemma 2." C'est le lemme principal auquel Huygens aura recours constamment dans la suite. Aussi on voit aisément que le point F représente le centre de gravité du parallélipipède flottant, H celui de la partie submergée dans une situation où RC est la ligne de niveau du liquide et que le sens dans lequel alors le parallélipipède tendra à se mouvoir dépend de la situation relative des points Z, H et G.

[10] En notation moderne: $ZG \gtreqless ZH$ selon qu'on aît $\frac{3}{2}\,AE \times EB - \frac{1}{2}\,DC^2 \gtreqless AK^2$.

[11] Huygens annota en marge „*a* lemm. praec."

[12] „*b* lemm. praec." [Huygens].

quum AB sit dupla FB, et EB dupla YB; erit AE quoque dupla FY; ergo rectang. AEB duplum rectang. sub EB et FY; quare sesquialterum rectang.i AEB erit triplum rectang.i sub EB et FY, ideoque aequale rectang. sub triplâ EB et FY; sed et $\frac{1}{2}$ quadr. CD ostensum fuit aequale esse rectang. sub tripla EB et YZ; ergo rectang. sub triplâ EB et totâ FZ aequale est sesquialtero rectang. AEB una cum dimidio quadr. DC. quum autem ponatur sesquialterum rectang. AEB cum defectu dimidii quadr. DC majus quadr. AK vel ED, erit, addito utrinque quadr.o DC, sesquialterum rectang. AEB una cum dimidio quadr.o DC majus quadr.o EC; Ergo et rectang. sub tripla EB et FZ, majus erit quadr.o EC. Igitur tripla EB ad EC majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; atqui ut tripla EB ad EC ita necessario est rectang. sub triplâ EB et DC at rectang. sub EC et DC; igitur et rectang. sub tripla EB et DC ad rectang. sub EC, DC, majorem habet rationem quam EC ad FZ. Atqui rectang. sub. EC et CD (quia tripla EB est ad CD, ut EC ad HZ c [13])) aequale est rectang. sub tripla EB et HZ: igitur quoque rectang. sub tripla EB et CD ad rectang. sub tripla EB et HZ, sive basis CD ad HZ basin majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; et permutando CD majorem ad EC quam HZ ad FZ. sed propter similia triangula ECD, FZG, sicut CD est ad EC, ita est GZ ad ZF; igitur GZ ad ZF majorem quoque rationem habet quàm HZ ad FZ; quare GZ major HZ; quod erat ostendendum.

Jam si sesquialterum rectang. AEB, detracto dimidio quadr. DC, aequale sit quadr.o AK; dico tum quoque ZG aequalem fore HZ. Cujus demonstratio dependet à praecedenti. nam si sesquialterum rectang. AEB detracto $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale sit quadr. ED, omnia quae modò majora erant hìc erunt aequalia, quare et tandem GZ aequalis HZ.

Similiter si $\frac{3}{2}$ rectang. AEB detracto $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus fuerit quadr.o AK, omnia quae in praecedentibus erant majora, minora erunt, et tandem GZ minor HZ ut oportebat. Quare constat propositum.

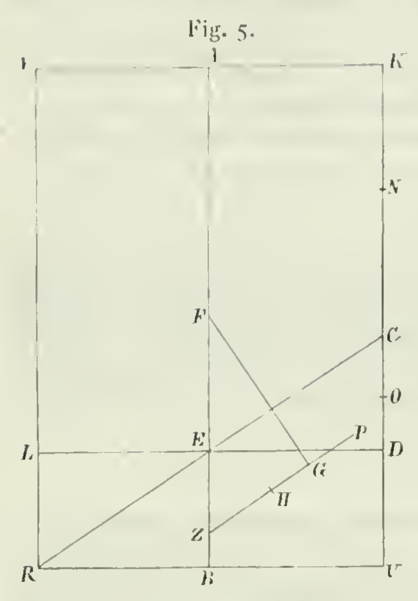
Manifestum autem est etiam tum constare, quum punctum R incidit in angulum M, ita ut loco trapezii abscissum sit triangulum, quamvis de hoc casu speciatum sit Theorema sequens.

[13]) „*c* lemm. praec." [Huygens].

Lemma 3. [14])

Sit rectangulum KR, à quo abscissum triangulum RCV eductâ lineâ RC ex uno angulorum. agatur autem per H centrum gravitatis dicti trianguli linea ZHP parallela RC. et cadat ex F centro rectang.i KR, FG perpendicularis in ZP. porrò sit VD dimidia VC, et VN tres quartae VK. dico in lineâ ZP, partem ZG interceptam ab axe rectanguli, AB, et perpendiculari FG, majorem aequalem vel minorem fore parte ZH, intercepta ab eodem axe et centro grav. trianguli RCN; [15]) *prout rectang. VDN majus aequale vel minus erit octavâ parte quadrati basis RV, vel YK.*

Fig. 5.



Sit primò rectang. VDN majus octavâ parte quadrati RV; dico ZG majorem fore ZH.

ducatur enim recta DL aequidistans basi RV, quam manifestum est in eodem puncto E secare axem AB ubi idem sectus est à linea RC et abscindere rectang. DR aequale triang. RCN [15]) praeterea CD bifariam dividatur in O.

Quia igitur rectang. VDN majus est $\frac{1}{8}$ quadrati RV, erit duplum rectanguli VDN id est rectang.um sub VC et DN majus $\frac{1}{4}$ quadr. RV, seu quadrato BV. rectang. verò sub VC et DN aequale est excessui rectanguli sub VC et VN supra rectang. sub VC et VD, id est excessui $\frac{3}{4}$ rectang.i CVK supra $\frac{1}{2}$ quadr. VC. ergo et hic excessus major est quadrato BV. sed $\frac{3}{4}$ rectang. CVK aequale est rectangulo sub KV et VO; id est rectangulis duobus, nempe rect.o sub KD et VO, et rect.o sub DV et VO; id est rectang.o sub KD et VO una cum $\frac{3}{8}$ quadr. VC. Ergo et haec duo cum defectu $\frac{1}{2}$ sive $\frac{4}{8}$ quadr. VC majora quadrato BV. Id est rectang.um

---

[14]) Primitivement il y avait „Theorema 3." Le „Lemma" contient une simplification du lemme précédent pour le cas où le point R coïncide avec le point M de la figure 4. En effet, les relations $\frac{3}{2}\,AE \times EB - \frac{1}{2}\,DC^2 \gtreqless AK^2$, peuvent s'écrire alors (voir la fig. 5, où $VN = \frac{3}{4}\,KV$):

$\frac{3}{2}\,KD \times DV - \frac{1}{2}\,DV^2 \gtreqless \frac{1}{4}\,RV^2$, ou bien: $(\frac{3}{4}KD - \frac{1}{4}\,DV)\,DV \gtreqless \frac{1}{8}\,RV^2$, 'est-à-dire:

$(\frac{3}{4}\,KV - DV)\,DV \gtreqless \frac{1}{8}\,RV^2$; $(NV - DV)\,DV \gtreqless \frac{1}{8}\,RV^2$ et finalement:

$ND \times DV \gtreqless \frac{1}{8}\,RV^2$.

[15]) Lisez RCV.

ſub KD et VO ſive ſeſquialterum rectanguli KDV cum defectu $\frac{1}{8}$ quadr. VC ſive cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati DC majus quadrato BV; quare et ZG major erit ZH [a] [16]), quod erat oſtendendum.

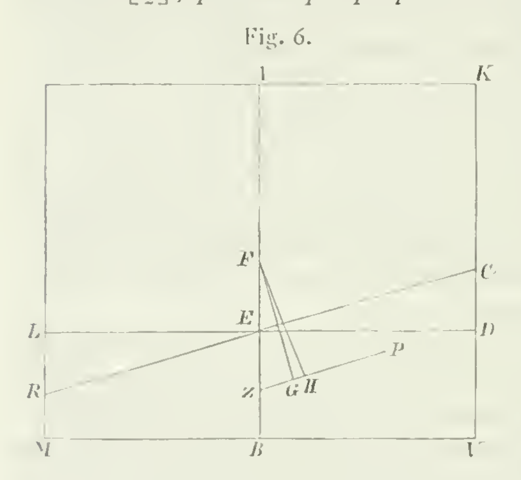
Jam ſi rectang. VDN aequale ſit octavae parti quadrati RV; dico ZG quoque aequalem fore ZH. Omnia enim quae modò majora fuere hìc erunt aequalia, quare et tandem ſeſquialterum rectang. KDV cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale quadrato BV: ideoque ZG aequalis ZH [b] [17]), ut oportebat.

Eâdem ratione ſi rectang. VDN minus ſit octavâ parte quadrati RV, erit quoque ZG minor ZH. quare conſtat propoſitum.

Theorema 2. [18])

Rectangulum cujus quadratum baſis quadrati lateris non eſt minus quàm ſeſquialterum [$\frac{3}{2}$], *quamcunque proportionem ad liquidum habeat in gravitate; liquido ſupernatans demersâ baſe et poſitum inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, non manebit inclinatum, ſed rectum restituitur, id eſt ut axis ſit ad perpendiculum.* [19])

Fig. 6.



Sit Rectangulum KM, cujus quadratum baſis MV non minus ſit quàm ſeſquialterum quadrati lateris VK, habeat autem quamcunque ad liquidum in gravitate proportionem, eique ſupernatet demerſâ baſe et poſitum ſit inclinatum, adeo ut ſuperficies liquidi ſit RC; dico Rectangulum non ita conſiſtere ſed reſ-

---

[16]) „*a* lemm. 2." [Huygens].

[17]) „*b* lemm. 2." [Huygens].

[18]) Primitivement „Theorema 4" (comparez les notes 9 et 14). Ce theorème et le „theorema 3" qui suit, contiennent ensemble la solution complète du problème de la stabilité de l'équilibre d'un parallélipipède flottant dans la situation verticale. Cette solution est conforme à celle, publiée pour la première fois en 1746 par Bouguer dans l'ouvrage cité vers la fin de la note 6. Voir la page 265 du Chapitre IV, Livre II, Section II. Euler, de même, a donné une solution identique, p. 107 du Tome I de l'ouvrage: „Scientia navalis seu tractatus de construendis ac dirigendis navibus. Auctore Leonhardo Eulero. Prof. Honorario academiae imper. scient. et directore acad. reg. scient. Borussicae. Petropoli. Typis Academiae Scientiarum CIↃ IↃCCXLIX.

[19]) Le théorème indique que la position (I), voir l'Avertissement à la p. 87 du Tome présent, sera stable toutes les fois qu'on aura $\eta \leq \sqrt{\frac{2}{3}}$, c'est-à-dire, toutes les fois que le point représentatif (ε, η) tombera au Tableau de l'Avertissement dans l'intérieur du rectangle ORSA, ou sur la droite RS.

titui, ut axis AB sit ad perpendiculum. Sit enim, divisâ AB bifariam, in F centrum grav. rectanguli KM. et H centrum gravit. trapezii RCVM, per quod ducatur ZHP parallela RC, et in eam ex F cadat perpendicularis FG. denique per E ubi superficies liquidi secat axem AB ducatur LED parallela MV.

Quia igitur quadratum VM non est minus quàm sesquialterum quadrati KV sive AB, erit quoque quadratum AK non minus quàm sesquialterum quadrati AF. quum autem quadratum AF non sit minus rectangulo AEB [a 20]) : erit quoque sesquialterum quadrati AF non minus sesquialtero rectanguli AEB : quare et quadratum AK non minus quàm sesquialterum rectang. AEB. Ergo sesquialterum rectanguli AEB cum defectu dimidii quadrati DC minus erit quadrato AK. quare in lineâ ZP, pars ZG minor erit quam ZH [b 21]). Ergo quum FG perpendicularis sit in ZP et in superficiem liquidi RC, sequitur FH ad eandem non esse perpendicularem : ergo totum rectangulum ad eam partem inclinabit ad quam inclinat linea FH [c 22]), ascendetque à parte K et ab alterâ descendet, donec axis AB ad superficiem liquidi perpendicularis sit; quod erat demonstr.

Theorema 3.

Rectanguli cujus quadratum basis quadrati lateris sit minus quam sesquialterum [$\frac{3}{2}$], *latere ita secto, ut rectangulum sub segmentis aequale sit sextae parti quadrati basis; si rectangulum ad liquidum in gravitate non minorem proportionem habeat quàm segmentum majus habet ad latus, vel non majorem quàm segmentum minus habet ad idem latus; supernatet autem liquido demersâ base et ponatur inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, rectum restituetur.* [23]).

Sit rectangulum KM, cujus quadratum basis MV quadrati lateris VK minus sit

---

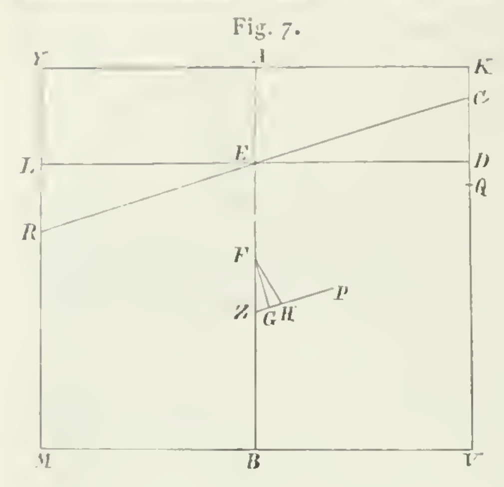
[20]) „*a* pr. 5 lib. 2. Eucl." [Huygens].

[21]) „*b* lemm. 2." [Huygens]. C'est-à-dire le „Lemma 2" du „Liber" présent. Primitivement on lisait „Theor. 2 h. lib." Consultez la note 9. Et il en est de même plusieurs fois dans la suite; mais nous ne mentionnerons plus les altérations qui ont eu pour cause le changement des „Theoremata 2 et 3" en „Lemmata" et qui prouvent que ce changement n'a été apporté qu'après l'achèvement du „liber II."

[22]) „*c* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[23]) Le théorème nous apprend que le parallélipipède flottant pourra conserver la position ①, indiquée p. 87 de l'Avertissement, pourvu que le point représentatif (ε, η) tombe dans l'espace BEFGCSFR du Tableau, et de même qu'il pourra conserver la position ⑤ toutes les fois que le point représentatif se trouvera dans l'une des divisions BEO ou GAC.

Pour le montrer supposons en premier lieu $MV = a$, $KV = b$, $a > b$. Soit alors $b\varepsilon$ l'un des segments du coté KV. Dans ce cas le théorème nous apprend que la stabilité exige que pour un rapport η donné de b à a la densité relative soit inférieure ou égale à la moindre, ou



quàm ſeſquialterum. ſectum autem ſit latus KV in Q, ita ut rectang. KQV aequaetur $\frac{1}{6}$ quadr. baſis MV vel YK. habeat verò rectang. KM ad liquidum in gravitate primò rationem non minorem eâ, quam QV habet ad KV: et liquido ſupernatans poſitum ſit inclinatum, ita ut liquidi ſuperficies ſit RC: dico rectum reſtitutum iri.

Sit enim rectang.i KM axis AB, et per E ubi is ſecat liquidi ſuperficiem RC ducatur LED parallela MV. porro ſit F centr. grav. rectanguli KM, et H trapezii merſi RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC atque in eam ex F cadat perpendicularis FG. denique jungatur FH.

Quia igitur rectang. KM ad liquidum in gravitate non minorem habet rationem quàm QV ad KV, habebit quoque trapezium demerſum RCVM ſive quod ei aequale eſt rectang. DM ad rectang. KM non minorem rationem quam QV ad KV [a 24]); quare DV non minor erit QV. Ideoque rectang. KDV ſeu AEB non majus rectangulo KQV. Ergo rectang. AEB non majus quoque quàm $\frac{1}{6}$ quadrati MV; et triplum rectang. AEB non majus quàm $\frac{1}{2}$ quadr. MV; et $\frac{3}{2}$ rectang. AEB non majus quàm $\frac{1}{4}$ quadr. MV ſive quàm quadratum AK. quamobrem $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK, atque ideo ZG minor ZH [b 25].) Ergo quum FG ſit perpendicularis ad ZP et ad ſuperficiem liquidi RC, ſequitur FH ad eandem non eſſe perpendicularem. Ergo totum rectangulum

---

bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation quadratique: $b\varepsilon(b - b\varepsilon) = \frac{1}{6}a^2$, qui se laisse écrire: $6\,\eta^2\,\varepsilon\,(1-\varepsilon) = 1$. Or, c'est là précisement l'équation de la courbe EFG du Tableau.

Supposons maintenant $MV = b$, $KV = a$, a toujours $> b$. Alors le parallélipipède se trouve dans la position ⑤, mais si alors $a\varepsilon$ représente le segment en question, le théorème exige que la densité relative soit inférieure ou égale à la moindre, ou bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation quadratique $a\varepsilon(a - a\varepsilon) = \frac{1}{6}b^2$, qui s'écrit maintenant $6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon) = \eta^2$; ce qui coïncide avec l'équation de l'ellipse à laquelle appartiennent les lignes OE et GA du tableau.

Ajoutons que les conditions de stabilité formulées dans les „Theoremata 2 et 3" peuvent être exprimées par la seule relation:

$$MV^2 > 6\,\varepsilon\,(1-\varepsilon)\,KV^2.$$

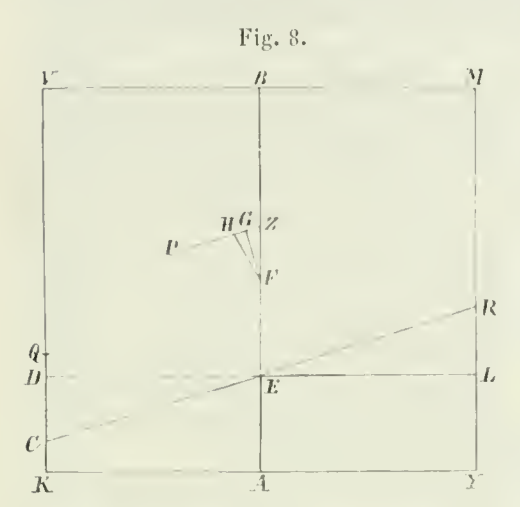
24) „a Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

25) „b lemm. 2." [Huygens].

KM ad eam partem inclinabit ad quam inclinat linea FH [c 26]), afcenderque à parte K et ab altera defcendet, donec axis AB, ad fuperficiem liquidi fiat perpendicularis; quod erat primò demonstr.

Habeat nunc rectang. KM ad liquid. in gravitate proportionem non majorem eà, quam KQ habet ad KV, et liquido fupernatans pofitum fit inclinatum ita ut liquidi fuperficies fit CR: dico fimiliter rectum reftitutum iri.

Fig. 8.



Sit enim H centrum grav. trapezii enatantis RMVC, per quod agatur ZP parallela RC, caeteraeque conftruantur ut in casu praecedenti.

Quum itaque rectang. MK ad liquidum in gravitate non majorem habeat rationem, quam KQ ad KV, habebit quoque trapezium demerfum RCKY five quod ei aequale eft rectang. DY ad rectang. MK non majorem rationem quam KQ ad KV. [a 24]) quare KD non major erit KQ et DV non minor QV. Unde ficut in cafu praecedenti demonftari poteft FH non effe perpendicularem ad ZP, ideoque nec ad fuperficiem liquidi RC. FH autem hic jungit centrum gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis; ergo totum rectangulum inclinabit eò quò inclinat linea FH [b 27]); defcendetque à parte V et ascendet à parte M, donec axis BA ad liquidi fuperficiem fiat perpendicularis; quod erat demonftrandum.

Hinc manifeftum eft parallelepipedum quodcunque, tam magnam vel tam parvam proportionem poffe habere ad liquidum in gravitate, ut fupernatans liquido demerfà bafium minimâ, et pofitum inclinatum, ita tamen ut neutra minimarum bafium liquidi fuperficiem contingat, rectum reftituatur, et planum bafium fuperficiei liquidi fiat parallelum.

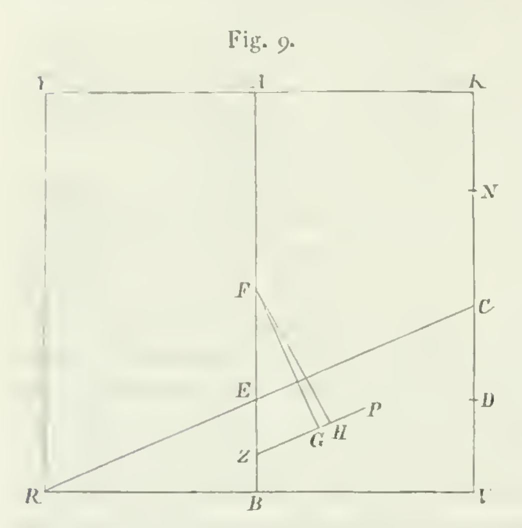
[26]) „*c* Theor. 1 h. lib." [Huygens].

[27]) „*b* Theor. 1 h. lib". [Huygens].

Theorema 4.

Rectangulum, cujus quadratum basis ad quadratum lateris minorem quidem habeat rationem quàm tria ad duo, majorem veró quàm novem ad octo, quamcunque ad liquidum in gravitate proportionem habuerit, eidem supernatans demersâ base nunquam ita consistet, ut unus angulorum sit in ipsâ liquidi superficie. [28])

Fig. 9.



Sit rectangulum KR cujus quadratum basis RV ad quadratum lateris KV minorem quidem rationem habeat quam 3 ad 2, majorem vero quam 9 ad 8;

Habebit autem ad liquidum in gravitate rationem, quae vel minor erit subduplâ vel non minor: quare habeat primò minorem subduplâ, et liquido supernatans dermersâ base, ponatur ita, ut angulus R sit in liquidi superficie, quae sit RC, dico angulum R infra eandem demersum iri.

Sit enim AB axis rectanguli, et F ejusdem centr. grav. sicut et H centr. grav. demersi trianguli RCV per quod agatur ZHP parallela CR; atque in eam cadat perpendicularis FG, et jungatur FH. Porrò sit CV bifariam secta in D; et KV in N, ita ut NV sint $\frac{3}{4}$ KV.

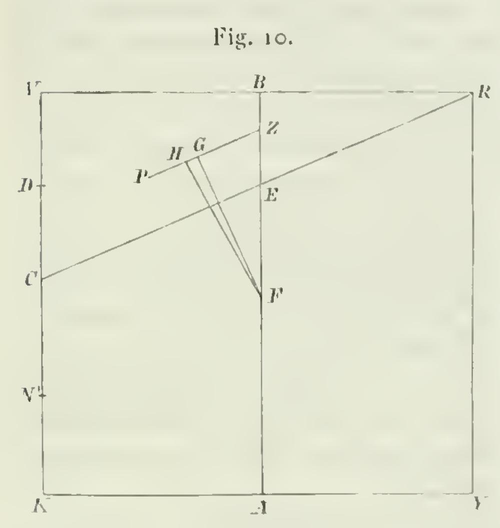
[28]) Le théorème démontre que, si dans le Tableau vis à vis de la p. 87 de l'Avertissement le point représentatif tombe à l'intérieur du rectangle TUSR, alors le parallélipipède ne pourra jamais flotter de telle manière que l'un des sommets de la section verticale soit dans le niveau du liquide et *qu'en même temps ce soit l'un des côtés les plus courts de cette section qui se trouve en partie au dessus et en partie au dessous du niveau du liquide.*

On observera que le théorème aussi bien que sa démonstration, qui l'un et l'autre supposent RV > KV, n'excluent nullement le cas où c'est le plus long côté qui est coupé par la ligne RC qui désigne le niveau du liquide. En effet, cette dernière situation pourra se réaliser, comme l'indique le Tableau, dans les limites données, toutes les fois que le point représentatif appartiendra à l'une des lignes HO ou NA et où par conséquent le parallélipipède pourra prendre la situation intermédiaire entre les cas ③′ et ④, ou ③ et ④.

Ajoutons que le théorème doit surtout servir à préparer le „Theorema 5" qui suit; à l'exemple d'ailleurs d'Archimède qui, dans les recherches sur la flottation du conoïde parabolique dont l'axe se trouve dans une situation inclinée, prépare de la même manière les Prop. VIII et IX du „Liber secundus" (pp. 22 verso et 26 recto de l'ouvrage cité dans la note 4 du „Liber 1" p. 94 du traité présent) par les Prop. VI et VII (pp. 16 verso et 21 verso du même ouvrage).

Rectang. VDN non poteſt majus eſſe quam $\frac{1}{4}$ quadrati VN[a 29]); quia verò VN est $\frac{3}{4}$ VK, erit quadratum VN $\frac{9}{16}$ quadrati KV, ideoque $\frac{1}{4}$ quadrati VN erit $\frac{9}{64}$ quadrati VK; ergo rectang. VDN non eſt majus quam $\frac{9}{64}$ quadrati VK. porrò quia quadr. RV ad quadr. VK majorem habet rationem quam 9 ad 8, erit octuplum quadrati RV majus noncuplo quadrati VK; et $\frac{8}{64}$ ſeu $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quàm $\frac{9}{64}$ quadrati VK. Ergo $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quoque rectangulo VDN. quare pars ZH major erit parte ZG[b 30]). et quum FG perpendicularis ſit in ZP, ac proinde in liquidi ſuperficiem RC, in eandem linea FH perpendicularis non erit. quapropter totum rectangulum in eam partem inclinabit in quam inclinat linea FH[c 31]); aſcendetque à parte K et ab alterâ parte deſcendet, ideoque angulus R mergetur infra liquidi ſuperficiem; quod erat demonſtr.

Fig. 10.



Jam habeat rectang. ad liquidum in gravitatem non minorem ſubduplâ rationem, et liquido ſupernatans demerſâ baſe ponatur ita ut angulus R ſit in liquidi ſuperficie, quae ſit RC; dico angulum R ſupra liquidi ſuperficiem ſublatum iri.

Sit enim H centr. grav. trianguli enatantis CVR, et reliqua conſtruantur ut in casu praecedenti, adeo ut CV rurſus bifariam ſecetur in D; et VK in N, ita ut VN ſit $\frac{3}{4}$ VK.

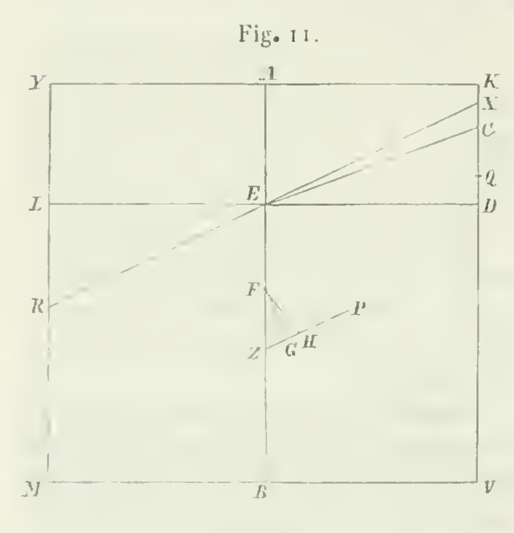
Demonſtrari itaque poteſt, ſicuti in casu praecedenti, FH non eſſe perpendicularem in ZP, neque in ſuperficiem liquidi CR: FH autem hic jungit centrum gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis CVR; Ergo totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH[d 32]); et deprimetur verſùs V, extolletur verò verſùs R ideoque angulus R ſupra liquidi ſuperficiem exſurget; quod erat demonſtrandum.

29) „*a* pr. 5. lib. 2. Eucl." [Huygens].
30) „*b* lemm. 3. h. lib." [Huygens].
31) „*c* Theor. 1. h. lib." [Huygens].
32) „*d* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

Theorema 5.

Rectangulum cujus quadratum basis quadrati lateris minus est quàm sesquialterum [$\frac{3}{2}$], *majus verò quàm sesquioctavum* [$\frac{9}{8}$]; *si, diviso latere sicut in Theor.* 3°, *ad liquidum in gravitate minorem habeat rationem, quàm segmentorum majus, majorem verò quàm segmentorum minus habet ad idem latus: liquido supernatans demersâ base et positum inclinatum ut tamen neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectum restituetur neque inclinatum manebit, nisi quando axis cum superficie liquidi fecerit angulum aequalem certo angulo, de quo infra dicetur.* [33])

Fig. 11.



Esto rectang. KM, cujus quadratum basis MV ad quadratum lateris KV minorem rationem habeat quam 3 ad 2, majorem verò quàm 9 ad 8, et diviso latere KV in Q ita ut rectangulum KQV aequetur $\frac{1}{6}$ quadrati basis MV, habeat rectangulum ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, ita ut DV minor quidem sit QV, major verò QK. et ductâ DL parallelâ VM, veniat ex E, ubi DL ab axe AB secatur, linea EC, ita ut partis compraehensae CD quadratum sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK. [34])

dico rectang. KM liquido supernatans et positum inclinatum, ita tamen ut neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectum restitui, neque consistere nisi cùm axis AB cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo ECD. sive AEC.

[33]) Le théorème nous apprend que le parallélipipède flottant pourra prendre la situation indiquée dans l'„Avertissement" par le numéro ②, toutes les fois que le point représentatif tombera dans l'espace VFWV du Tableau; c'est-à-dire toutes les fois qu'entre les limites $\sqrt{\frac{2}{3}} < \eta < \sqrt{\frac{8}{9}}$, on aura $\eta^2 > \frac{1}{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$.

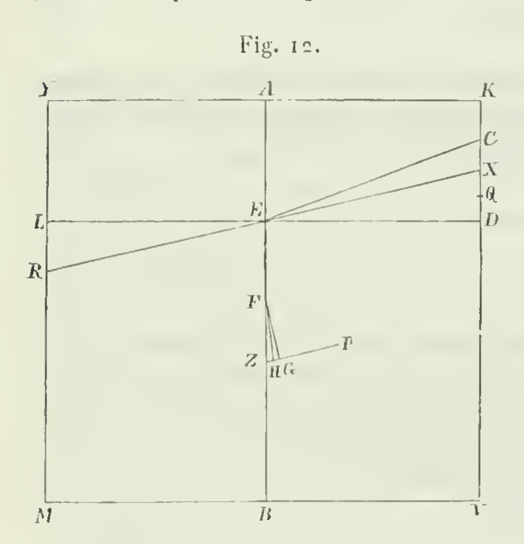
La forme sous laquelle le théorème a été rédigé, surtout l'introduction de l'„angulus, de quo infra dicetur." a été empruntée aux Prop. VIII et IX d'Archimède, dont il est question dans la note 28. De même les démonstrations se ressemblent par le principe.

[34]) C'est ici la définition de l'„angulus, de quo... dicetur." On en déduit facilement pour sa valeur : $\cot^2 AEC = 12\varepsilon(1-\varepsilon)\eta^2 - 2$, où $\eta = KV : MV$ et où ε représente, comme toujours, la densité du parallélipipède relative à celle du fluide.

Primò enim ita disponatur rectangulum ut liquidi superficies sit RX, quâcum axis AB faciat angulum minorem angulo AEC. Sit autem F centr. grav. rectang.i KM et H trapezii RXVM, per quod ducatur ZP parall. RX; atque in hanc cadat perpendic. FG, denique jungatur FH.

Quia igitur rectang. KM est ad liquidum in gravitate, sicut linea DV ad KV, sive ut rectang. DM ad KM; erit necessariò trapezium mersum RXVM aequale rectang.o DM [a 35]); quamobrem superficies liquidi RX et linea LD in eodem puncto E secant axem AB. erit itaque ex hijpothesi angulus AEX minor angulo AEC: quare XD maior CD. quum autem quadr. CD per constr. sit duplum excessus sesquialteri rectanguli AEB supra quadratum AK, erit $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu dimidii quadrati CD aequale quadrato AK: et, quum XD sit major CD, $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu dimidii quadrati XD minus erit quadrato AK; ergo ZG minor ZH [b 36]), et quum FG sit perpendicularis ad ZP atque ideo ad liquidi superficiem RX, ad eandem superficiem non erit perpendicularis FH; Ergo totum rectang. inclinabit, in quam partem inclinat linea FH, [c 37]) idque fiet quam diu superficies liquidi non convenit cum lineâ EC.

Fig. 12.



Jam ita disponatur rectangulum ut liquidi superficies RX cum axe AB faciat angulum majorem angulo AEC. sit autem H centr. grav. trapezii mersi RXVM, per quod ducatur ut supra ZP parall. RX, atque in eam cadat perpendicularis FG. et denique jungatur FH.

Sicuti suprà ita hic quoque lineae LD et RX in eodem puncto E secant axem AB: Ergo hìc ex hijpothesi angulus AEX major angulo AEC; quare XD minor CD. quum autem quadratum CD aequali sit duplo excessui $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB supra quadratum AK [d 38]), erit $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CD aequale quadrato AK; et, quum XD sit minor CD, erit $\frac{3}{2}$ rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati XD, majus quadrato AK; ergo ZG major ZH [e 39]), et quum FG sit perpendicularis ad ZP

35) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

36) „*b* lemm. 2. h. lib." [Huygens].

37) C'est-à-dire de telle manière que le point K s'élèvera et que par conséquent la ligne de niveau EX s'approchera de EC. Huygens ajoute en marge „*c* Theor. 1. h. libr."

38) „*d* per constr." [Huygens].

39) „*e* lemm. 2. h. lib." [Huygens].

ideoque et ad liquidi ſuperficiem RX, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH; quare totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH[40]), et deprimetur verſùs K; quod ſemper fiet donec linea EC jaceat in liquidi ſuperficie. Non conſiſtet igitur rectangulum niſi quum axis AB cùm liquidi ſuperficie faciet angulum angulo AEC aequalem; quod erat demonſtr.

Theorema 6.

Rectangulum cujus baſis major latere, quadratum verò baſis ad quadratum lateris minorem habet rationem quàm novem ad octo, liquido ſupernatans; Aliquando rectum conſistet; aliquando ita ut unus angulorum contingat liquidi ſuperficiem, idque quatuor caſibus; ſaepe ita inclinatum ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat. nonnunquam ut tres anguli demerſi ſint; nonnunquam denique ut demerſus ſit tantum unus. ſecundum diverſam proportionem quam rectangulum ad liquidum habebit in grav. [41])

Concluſio 1.

Eorum quae dicta ſunt primum hìc demonſtrare ſuperfluum eſt, nam quod Theoremate 3° de omnibus quae inclinare poſſunt rectangulis oſtenſum fuit, ſine dubio etiam hùic convenit. [42])

2.

Sit itaque rectangulum KM [Fig. 13] cujus baſis MV major latere KV, quadratum verò MV ad quadratum KV minorem habeat rationem quàm novem ad octo; et latere KV diviſo in quatuor partes aequales punctis O, P, S, praetereàque in D et T ita ut rectangula KDS, KTS, ſingula ſint aequalia octavae parti quadrati baſis MV; habeat rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem quàm DV vel DK vel TV vel TK ad latus

---

[40]) „*f* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[41]) Le théorème nous fait connaître que, si le point représentatif tombe dans l'intérieur du rectangle BCUT du Tableau de l'„Avertissement," c'est-à-dire quand on a $\eta > \sqrt{\frac{8}{9}}$, alors les positions ①, ②, ③ et ③′, indiquées p. 87 de l'„Avertissement", et aussi leurs positions intermédiaires, peuvent se présenter selon que ce point se trouve dans l'une ou l'autre des divisions qui apartiennent au rectangle mentionné. Voir, pour plus de détails les „Conclusiones."

[42]) La „Conclusio" se rapporte aux divisions BEVT et GCUW du Tableau, où la position ① peut se réaliser d'après le „Theorema 3." Comparez la note 23.

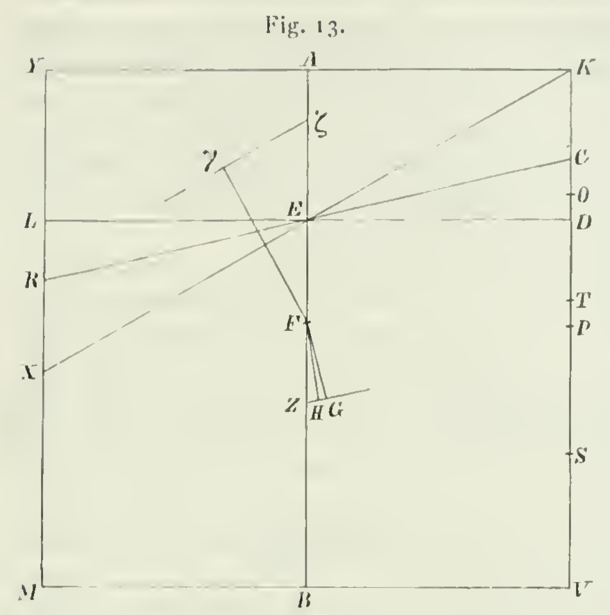


Fig. 13.

KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat; dico euſque ultro inclinatum iri, donec unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [43])

Ut autem appareat omnes hosce casus differentes eſſe, et omnes poſſe habere locum, duo ſunt oſtendenda; primum, quòd punctum T non cadat infrà P ſive medium lateris KV; alterum, quòd puncta D et T non coincidant. Quorum illud ſic oſtenditur.

Quum rectangula KOS, KPS ſingula ſint aequalia $\frac{1}{8}$ quadrati KV, (utpote contenta ſub dimidiâ KV et ejusdem quartâ parte,) rectangula verò KDS, KPS ſingula per conſtr. aequalia $\frac{1}{8}$ quadrati MV, quadr. autem MV majus ſit quadr.o KV per hijpotheſin erunt rectangula ſingula KDS, KTS majora rectangulis KOS, KPS, ideoque puncta D et T propiora erunt medio linea KS, quàm puncta O et P, quare punctum T erit ſupra punctum P.

Alterum quoque facilè demonſtratur; nam ſi puncta D et T coincidunt, id erit

[43]) Dans cette „Conclusio" il s'agit évidemment des cas, où l'on a $b(1-\varepsilon)\left\{\frac{3}{4}b - b(1-\varepsilon)\right\} = \frac{1}{8}a^2$ (a = MV, b = KV, ε = DV : KV ou TV : KV), ou bien $b\varepsilon\left\{\frac{3}{4}b - b\varepsilon\right\} = \frac{1}{8}a^2$ (ε = DK : KV ou TK : KV), c'est-à-dire: $2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1)\eta^2 = 1$, ou $2\varepsilon(3-4\varepsilon)\eta^2 = 1$. Dans le premier cas le point représentatif se trouve sur la courbe LMN du Tableau, dans le second sur la courbe HKL et la „Conclusio" nous apprend qu'alors le parallélipipède pourra prendre l'une des positions intermédiaires entre les positions ② et ③, ou ② et ③′ indiquées dans l'Avertissement, c'est-à-dire tel que l'un des sommets de la section verticale se trouve dans le niveau du liquide. Comme le tableau nous le montre, il y a, pour une valeur donnée de $\eta = \frac{b}{a} > \sqrt{\frac{8}{9}}$, quatre de ces positions, correspondant aux „quatuor casibus" dont il est question dans le „Theorema 6". Mais alors on doit supposer expressément que c'est le côté le plus court de la section verticale qui est coupé par le niveau du liquide. Si l'on admet que cela arrive aussi pour le côté le plus long, on trouve deux nouvelles positions pour lesquelles le point représentatif se trouvera sur l'une des courbes HO ou NA du tableau. Comparez la note 86.

Ajoutons la remarque que la *stabilité* des positions en question n'est pas démontrée complètement dans ce qui suit, puisque à cet effet on devrait connaître encore la manière dont le parallélipipède se comportera quand il est poussé vers la position ③ ou ③′.

in mediò lineae KS, quia rectangula KDS, KTS ſunt aequalia; itaque ſingula aequalia erunt $\frac{1}{4}$ quadrati KS: ſed quia quadratum KV ad qu. MV majorem habet rationem quam 8 ad 9, erit noncuplum quadrati KV majus octuplo quadrati MV, et $\frac{9}{16}$ quadrati KV, id eſt, quadr. KS majus quàm $\frac{8}{16}$ ſive $\frac{1}{2}$ quadrati MV, et $\frac{1}{4}$ quadrati KS majus quàm $\frac{1}{8}$ qu. MV: ergo etiam ſingula rectangula KDS, KTS majora quàm $\frac{1}{8}$ qu. MV; quod eſt abſurdum, nam ſingula ex conſtr. aequalia ſunt $\frac{1}{8}$ quadr. MV. Puncta igitur D et T non coincidunt.

Habeat itaque primò rectang. ad liquidem in gravitate proportionem quàm DV ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut liquidi ſuperficies ſit RC: dico eousque inclinatum iri ultro, donec angulus K ſit in liquido ſuperficie.

Sit enim DL parallela KY, et fiat triangulum KYX aequale rectangulo KL; Porrò ſit in axe AB, F centr. rectanguli KM. item H centr. grav. trapezii merſi RCVM, et γ trianguli XYK, per quae ducantur ZHG parall. RC et $\gamma\zeta$ parall. XK. in easque cadant perpendiculares FG et in alteram Fγ. Jungatur denique FH.

Quia igitur rectang. ad liquidum in gravitate eſt ſicut DV ad KV, ſive ut rectang. DM ad KM; ſequitur trapezium merſum RCVM rectangulo DM aequale eſſe [b 44]), quare lineae DL, RC et KX in eodem puncto E ſecant axem AB. Quia autem rectangulum ſub YL et exceſſu $\frac{3}{4}$ YM ſupra YL id eſt rectang. KDS aequale eſt per conſtr. $\frac{1}{8}$ quadr. MV; ſequitur in lineâ $\gamma\zeta$, (quae per centr. grav. trianguli XYK parallela ducta eſt ipſi XK), ſpatium $\gamma\zeta$ interceptum à perpendiculari Fγ et axe AB, aequale eſſe ſpatio intercepto à centro gr. trianguli XYK et eodem axe AB [c 45]). et quoniam haec ſpatia ſunt aequalia, ſequitur $\frac{3}{2}$ trianguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. LX aequari quadrato AK [d 46]). Igitur $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ qu. DC (quia DC minor eſt DK) majus erit quadrato AK: quamobrem in lineâ ZG, quae per H centr. gr. trapezii RCVM ducta eſt parallela RC, majus erit ſpatium ZG ſpatio ZH [e 47]). Ergo quum FG ſit perpendicularis ad lineam ZG et conſequenter ad liquidi ſuperficiem RC, in eandem non erit perpendicularis linea FH. quare totum rectang. inclinabit in quam partem inclinat eadem

---

[44]) „*b* Theor. 4. lib. 1." [Huygens]. Primitivement il y avait ici „*a*" dans le texte et le signe d'annotation „*b*" s'y trouvait dans une phrase biffée. Depuis l'„*a*" du texte fut changée en „*b*" et l'annotation „*a*" biffée en marge. Elle était d'ailleurs identique à l'annotation „*b*" que nous donnons.

[45]) „*c* lemm. 3 h. lib." [Huygens]. En effet les points K, D, S de la figure 13 correspondent aux points V, D, N de la figure 5 (p.127 du Tome présent) dont il faut tourner le bas en haut. On a donc d'après le lemme cité dans cette dernière figure, au cas présent, ZH = ZG; donc HF, c'est-à-dire le Fγ de la présente figure, perpendiculaire à ZP, c'est-à-dire à $\gamma\zeta$; où γ représente le centre de gravité du triangle XYK.

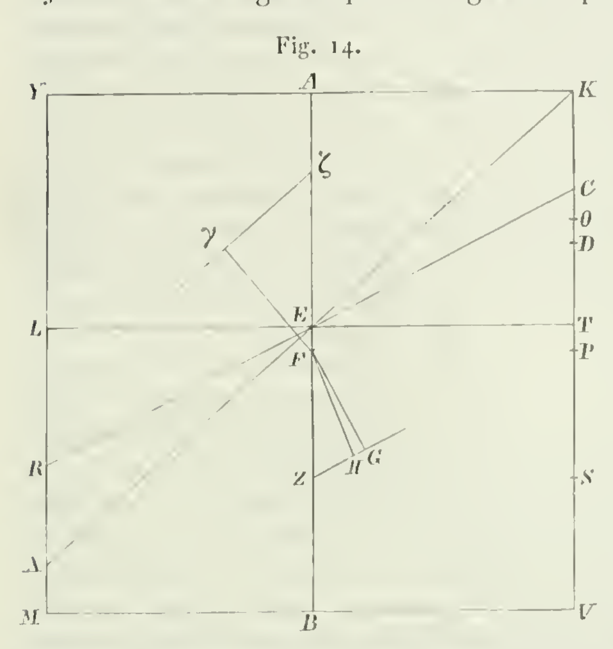
[46]) „*d* per conv. lemm. 2 h. lib." [Huygens].

[47]) „*e* lemm. 2. h. lib." [Huygens].

FH[f 48]), et deprimetur verſùs K, extolletur verò versùs Y, donec ſuperficies liquidi ſit XK; et quia tunc linea Fγ, quae jungit centr. gr. rectanguli KM cum centro grav. trianguli enatantis XYK perpendicularis erit in $\gamma\zeta$ et conſequenter in ſuperficiem liquidi, ſicuti modò oſtenſum eſt, manifeſtum eſt rectang. ad neutram partem magis inclinatum iri; quod erat demonſtr.

Jam habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem quam TV [Fig. 14] ad KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut ſuperficies liquidi ſit RC; dico eousque ultro inclinatum iri donec angulus K ſit in liquidi ſuperficie, eaque ſit XK.

Fig. 14.



ducatur enim TL linea loco DL, et reliqua conſtruantur ut in caſu praecedenti, Eritque eadem demonſtratio; nimirum quia hìc rectang. KTS aequale eſt $\frac{1}{8}$ quadr. MV[g 49]), incidet perpendiculum Fγ in ipſum centrum grav. trianguli XYK[h 50]), quare cum rectangulum erit ita inclinatum ut ſuperficies liquidi ſit XK, ad neutram partem magis inclinabit.

Item ſi rectang. ad liquidum in gravitate ſit ut DK vel TK ad KV, invertantur praecedentia ſchemata, (adeò ut Fγ tum fiat ea quae jungit centr. gr. rectanguli KM cum centro grav. partis mersae) et eaedem quae in duobus prioribus caſibus erunt demonſtrationes. Si igitur rectangulum ſit ad liquidum in gravitate ut DV vel TV vel DK vel TK ad KV, etc. quod erat demonſtrandum.

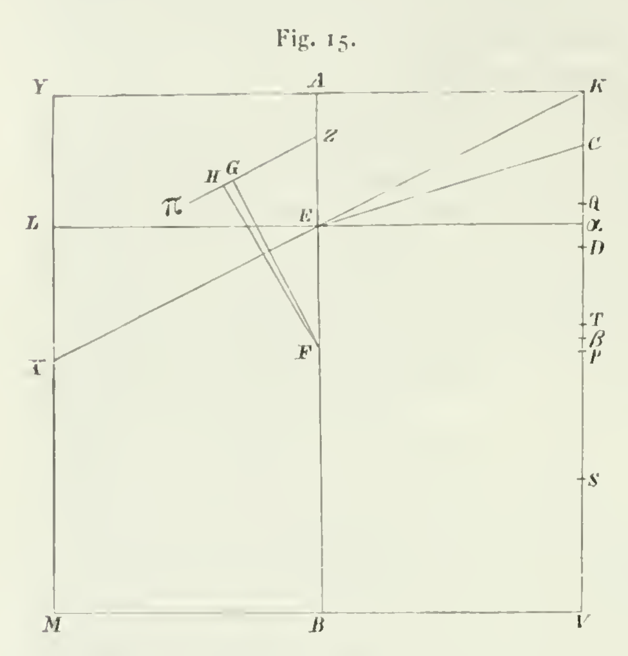
3.

Latere KV [Fig. 15] diviso ut ſupra bifariam in P, et PV bifariam in S; ut et punctis D et T, ita ut ſingula rectangula KDS, KTS, aequentur $\frac{1}{8}$ quadrati baſis MV vel YK; praetereaque in Q, ita ut rectang. KQV aequetur $\frac{1}{6}$ quadrati MV, sicut factum fuit

[48]) „f Theor. 1. h. lib." [Huygens].
[49]) „g p. constr." [Huygens].
[50]) „h lemm. 3. h. lib." [Huygens].

Theor. 3°: sumptòque puncto ubivis inter Q et D ut α, et alio infra T, non tamen ultra P, ut β: Si rectang. ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV; et liquido supernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, neque rectum restituetur, neque inclinatum manebit, nisi axis cum liquidi superficie fecerit angulum aequalem angulo invento ut supra Theor. 5°. [51])

Fig. 15.



Habeat primò rectang. ad liquidum in gravitate rationem quam α V ad KV, ductâque αL parallela YK, veniat ex E, ubi eadem αL secat axem AB, linea EC, ita ut partis interceptae Cα quadratum sit duplum excessus sesquialteri [$\frac{3}{2}$] rectanguli KαV supra quadratum AK.

dico si rectang. KM liquido imponatur inclinatum ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, ita ultro dispositum iri ut axis AB cum liquidi superficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel ECα.

ducatur enim ex angulo K linea KX, quae transeat per E ubi axis secatur à

[51]) La „Conclusio 3" nous apprend que la position (2) pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif se trouve dans les divisions EVKH, NMWG ou KLM du Tableau de l'Avertissement. Sur l'angle que l'axe du parallélipipède fera alors avec le plan horizontal, voir la note 34 (p. 134).

Ajoutons que la „Conclusio" peut être formulée encore d'une autre façon de telle manière qu'elle soit valable pour toutes les valeurs de ε. En effet, la position (2) pourra se présenter toutes les fois qu'on a: $\eta^2 > \frac{1}{6\varepsilon(1-\varepsilon)}$ et simultanément: $\eta^2 < \frac{1}{2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1)}$; comme aussi $\eta^2 < \frac{1}{2\varepsilon(3-4\varepsilon)}$.

C'est sous cette dernière forme qu'on retrouve chez Euler, p. 41 „Coroll. 4" de l'ouvrage de 1749 cité dans la note 18 (p. 128), les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une des positions (2) puisse être une position d'équilibre; toutefois Euler n'y démontre pas, comme Huygens, la stabilité d'une telle position.

linea αL; fitque trianguli XYK centrum grav. H, per quod agatur linea πZ parallela XK, in eamque cadat ex F centro rectang.i KM, perpendicularis FG; denique jungatur FH.

Quoniam igitur rectang. KQV per conftr. aequale eft $\frac{1}{8}$ quadr. bafis MV, rectangulum verò KM ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor eft eâ, quam QV, major verò eâ, quam QK habet ad latus KV; fequitur rectangulum KM non rectum reftitutum iri.[a 52]) Sed neque eousque inclinabitur ut bafis YK contingat liquidi fuperficiem; nam fi eousque jam inclinatum ponatur ut angulus K fit in liquidi fuperficie KX, continuò idem angulus fupra liquidi fuperficiem extolletur. quod fic oftenditur; quia enim rectang. eft ad liquidum in gravitate, ficut αV ad KV, five ut rectang. αM ad KM, erit etiam trapezium demerfum XKVM aequale rectangulo αM[b 53]), quare liquidi fuperficies KX in eodem puncto E fecabit axem AB, ubi fectus fuit à lineâ αL, eritque YL dimidia ipfius YX. Rectangulum autem fub YL et exceffu $\frac{3}{4}$ YM fupra YL, id eft rectang. KαS minus eft rectangulo KDS, (quia punctum D propiùs eft medio lineae KS quàm punctum α,) ergo idem illud rectang. minus quoque octavâ parte quadrati MV.

Ergo in lineâ πZ pars GZ minor HZ[c 54]): ergo quum FG fit perpendicularis ad πZ et confequenter ad liquidi fuperficiem, ad eandem fuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centr. gravitatis totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis XYK: quare totum rectang. inclinabit quò inclinat linea FH[d 55]), et angulus K fupra liquidi fuperficiem afcendet.

Demonftratum igitur eft, rectangulum KM, neque rectum reftitutum iri, neque tamen ita confiftere poffe ut alterutra bafium contingat fuperficiem liquidi. Quòd autem angulus, quem, rectangulo confiftente, axis AB cum liquidi fuperficie faciet, neque major neque minor futurus fit angulo AEC vel ECα, demonftrari facile poterit, ita ut in Theoremate 5° hujus libri.

Habeat nunc rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem quam βV ad KV, ductâque βL [Fig. 16] ficut in cafu praecedenti ducta fuit αL inveniatur etiam fimili modo angulus ECβ.

dico fi rectangulum KM liquido imponatur inclinatum ut tamen neutra bafium liquidi fuperficiem contingat, ita ultro difpofitum iri, ut axis AB cum liquidi fuperficie faciat angulum aequalem angulo AEC vel ECβ.

---

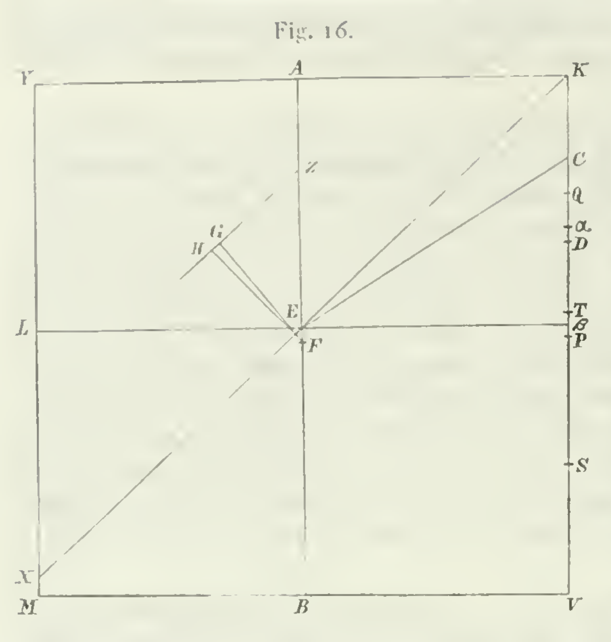
52) „*a* p conv. Theor. 3. h. lib." [Huygens].

53) „*b* per Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

54) „*c* lemm. 3. h. lib." [Huygens]. En effet, les points K, α, S de la presente figure, correspondent aux points V, D, N de la figure 5 (p. 127), qu'on doit considérer comme tournée le bas en haut.

55) „*d* Theor. 1. h. lib." [Huygens].

Fig. 16.



Conſtruantur enim reliqua ut in caſu praecedenti, et non abſimilis erit demonſtratio.

Nam quia hìc rectang. ad liquidum in gravitate rationem habet quam βV ad KV, quae minor eſt eâ quam QV, major verò eâ quam QK habet ad KV, non poterit rectangulum rectum reſtitui. ª [56])

Et rurſus quia hic rectang. KβS minus eſt rectangulo KTS, id eſt octavâ parte quadrati MV, non poterit rectangulum eousque inclinari, ut angulus K deſcendat uſque in liquidi ſuperficiem KX, quia continuò idem angulus rurſus aſcendat, nam FH non erit perpendicularis in liquidi ſuperfic. KX.

Ergo rectang. neque rectum conſiſtit neque ita ut alterutra baſium ullo modo contingat liquidi ſuperficiem. quòd verò angulus, quem, conſiſtente rectangulo KM, axis AB faciet cum liquidi ſuperficie, aequalis futurus ſit angulo AEC vel ECβ, iterum demonſtrare licebit, ſicut factum fuit Theoremate 5° hujus libri.

Quòd ſi rectang. ad liquidum in grav. ſit ut αK vel βK ad KV, inverſa tum intelligantur praecedentia duo ſchemata, et eaedem quae in praecedentibus caſibus erunt demonſtrationes, niſi quod tunc eae partes merſae erunt, quae priùs enatabant.

Si igitur rectangulum ſit ad liquidum in gravitate, ut αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV etc. quod erat demonſtr.

4.

Latere KV [Fig. 17] ut ſupra diviſo punctis S, T et D, nempe ut KS ſit $\frac{3}{4}$ KV, et ſingula rectangula KDS, KTS aequalia octavae parti quadrati MV vel YK; rectangulum ad liquidum in gravitate rationem habet quam χV ad KV, quae minor ſit eâ, quam

[56]) „a per conv. Theor. 3. h. lib." [Huygens].

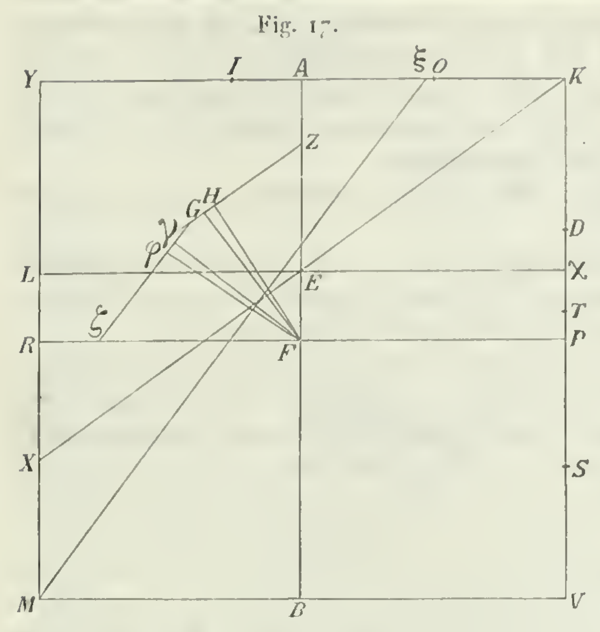


Fig. 17.

DV, major verò eâ, quam DK habet ad KV; et liquido fupernatans, ponatur ita ut tres anguli merfi fint, K, V et M; dico omnes tres necessariò merfos manere [57])

Siquidem enim angulus K emerfurus eft, quum fit pofitus infra liquidi fuperficiem, oportet ut prius fit in ipfâ liquidi fuperficie, eàque fit KX.

Sit itaque trianguli XYK centrum gravitatis H, per quod agatur GHZ parallela XK, in eamque ex F centro rectanguli KM, cadat perpendicularis FG, et denique è χ ducatur χL parallela YK. quia igitur rectang. KM eft ad liquidum in gravitate, ficut χV ad KV, five ut rectang. χM ad KM, erit etiam trapezium merfum XKVM aequale rectangulo χM [a 58]), ideoque fuperficies liquidi KX in eodem puncto E fecabit axem AB, ubi fecatur à linea χL, et erit YL dimidia ipfius YX. Rectang. autem fub YL et exceffu $\frac{3}{4}$ YM fupra YL, id eft, rectang. KχS, majus eft rectangulo KDS vel KTS, (quia punctum χ propius eft medio lineae KS quàm punctum D vel T, [59]) ergo idem rectang. majus quoque octavâ parte quadrati MV. Ergo in lineâ GZ pars GZ major erit parte HZ [b 60]); igitur quum FG fit perpendi-

---

[57]) La „Conclusio 4" nous fait connaître que le parallélipipède pourra prendre la position (3) toutes les fois que le point représentatif (ε, η) se trouve dans l'intérieur de la région LMN du Tableau de l'Avertissement. On remarquera que l'angle que l'axe fera avec le plan horizontal n'est pas indiqué. En réalité, comme nous l'avons montré dans la note 10 de l'Avertissement, la détermination de cet angle mènerait à la résolution d'une équation biquadratique.

D'ailleurs les conditions nécessaires et suffisantes, contenues dans la „Conclusio 4", pour que la position (3) soit possible peuvent être indiquées par les relations:

$$\varepsilon > \tfrac{1}{2},\ \eta^2 > \frac{1}{2(1-\varepsilon)(4\varepsilon-1)}.$$

[58]) „*a* per Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

[59]) En effet, le point milieu de la ligne KS se trouve à égale distance de D et de T.

[60]) „*b* lemm. 3. h. lib." [Huygens].

cularis ad GZ, et conſequenter ad liquidi ſuperficiem XK, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centrum grav. totius rectanguli cum centro grav. partis enatantis XYK; quare totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH [c 61]), deſcendetque angulus K infra liquidi ſuperficiem. Ergo quidem angulus K non emerget.

Jam ſi dicatur emerſurus angulus M, oportebit ſimiliter ut ſit priùs in ipſâ liquidi ſuperficie, eâque ſit Mξ.

Sit itaque φ centrum gravitatis trianguli MYξ, per quod agatur $\zeta\varphi\gamma$ parallela Mξ, in eàmque cadat perpendicularis Fγ. porrò jungatur Fφ, et per F ducatur RFP parallela YK; et denique ſit OY $\frac{3}{4}$ YK, et IY dimidia ipſius Yξ.

Quia igitur rectang. KM, ut modò dictum fuit, eſt ad liquidum in gravitate, ſicut rectang. χM ad KM; erit etiam trapezium demerſum MξKV aequale rectangulo χM [d 62]), et conſequenter trapezio XKVM: quare et triangulum MYξ aequale erit triangulo XYK. Ergo ut KY ad YM, ita erit ξY ad YX; et ita quoque IY ad YL ſive Kχ: ſed ita praeterea etiam eſt OY ad SK; et dividendo, [63]) ita quoque OI ad Sχ. Igitur quum KY major ſit quam YM [e 64]), erit etiam IY major YL ſive Kχ, et OI major Sχ; ergo rectangulum YIO majus rectangulo KχS; hoc autem majus eſt rectangulo KDS vel KTS, ſive octavâ parte quadrati MV; (quia videlicet punctum χ propius eſt medio lineae KS quam puncta D et T,) haec autem octava pars major eſt octavâ parte quadrati KV, quia MV major eſt quam KV; Rectangulum itaque YIO multo majus eſt octavâ parte quadrati KV vel YM.

quare in lineâ $\zeta\gamma$ erit pars $\zeta\gamma$ intercepta à perpendiculari Fγ et axe PR, major parte $\zeta\varphi$ [f 65]) interceptâ ab eodem axe PR et centro grav. trianguli MYξ. Ergo Fφ non erit perpendicularis ad $\zeta\gamma$, ideoque nec ad liquidi ſuperficiem Mξ; quare totum rectangulum inclinabit eò quò inclinat linea Fφ [g 66]), deſcendetque angulus M infra liquidi ſuperficiem. Igitur neque angulus M emergere poterit.

Quapropter neceſſariò tres anguli K, V et M demerſi manebunt, quod erat demonſtrandum.

[61]) „c Theor. 1. h. lib." [Huygens].

[62]) „d per Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

[63]) Consultez, sur cette expression, la note 10 du „liber 1", p. 97 du Tome présent.

[64]) „e per constr." [Huygens] Comparez le début du „Theorema 6".

[65]) „f lemm. 3. h. lib." [Huygens].

[66]) „g Theor. 1. h. lib." [Huygens].

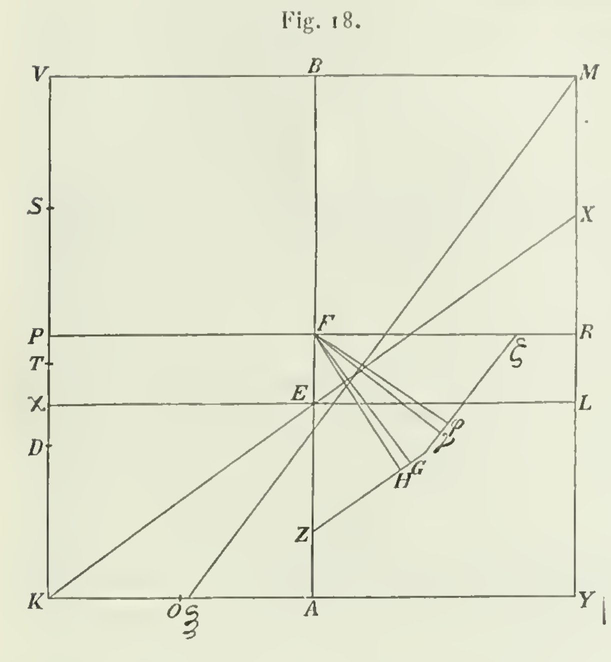


Fig. 18.

5.

Invertatur figura praecedens, habeatque rectangulum KM ad liquidum in gravitate proportionem quam χK ad KV, quae major ſit eâ quàm DK, minor vero eâ, quam TK habet ad KV; liquido ſupernatans, ponatur ita ut tres anguli K, V et M enatent ſupra liquidi ſuperficiem: dico nullum eorum demergi poſſe. [67])

Hujus eadem quae praecedentis concluſionis eſt demonſtratio, niſi quòd triangula quae illìc enatabant hìc ſint demerſa.

Theorema [7]. [68])

Quadratum ſupernatans liquido, aliquando rectum conſiſtet; aliquando inclinatum ita ut neutrum oppoſitorum laterum liquidi ſuperficiem contingat; aliquando ut unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie, idque duobus caſibus; nonnunquam etiam ut duo anguli ſint in liquidi ſuperficie, idque uno caſu; aliquando ita ut tres anguli ſint demerſi; aliquando denique ut tantum demergatur unus: pro diverſâ proportione quam quadratum ad liquidum habebit in gravitate. [69])

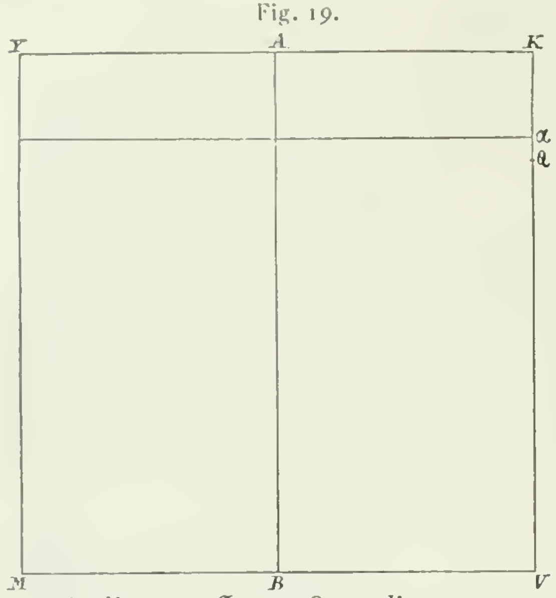
---

[67]) La „Conclusio 5" se rapporte à la position ③′ mentionnée dans l'„Avertissement". Elle apprend que cette position pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif tombe à l'intérieur de la division HKL du Tableau, c'est-à-dire lorsqu'on a $\varepsilon < \frac{1}{2} \cdot \eta^2 > \frac{1}{2\varepsilon(3-4\varepsilon)}$.

[68]) Le manuscrit a „Theorema 6", mais nous avons remplacé le 6 par le 7 pour éviter un double emploi.

[69]) Le théorème nous montre que, si le point représentatif tombe sur la ligne BC du Tableau de l'Avertissement, comme cela a lieu nécessairement quand la section verticale est un carré, alors les positions ①, ⑤; ②, ④; ③ et ③′, dont les quatre premières sont devenues identiques deux à deux, peuvent toutes se présenter selon que le point est situé dans l'une ou l'autre des divisions dans lequelles cette ligne est partagée par les points B, E, H, L, N, G, C. Voir, pour plus de détails, les „Conclusiones" et en particulier, pour une division essentielle qui n'a pas été aperçue par Huygens, la note 79.

Fig. 19.

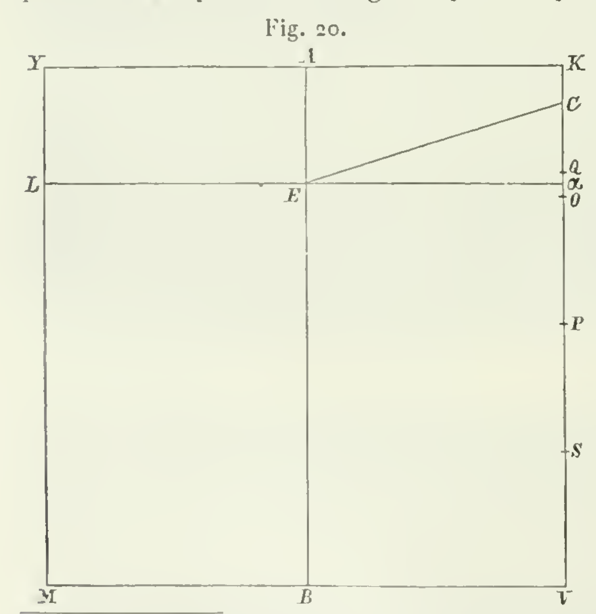


Conclusio 1.

Esto quadratum KM, cujus axis AB : et latere KV diviso in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur sextae parti quadrati KY vel MV; habeat ad liquidum in gravitate proportionem quam αV ad KV, quae major sit eâ quam QV habet ad KV, vel habeat eam quam αK ad KV, quae minor sit eâ quam QK habet ad KV: dico necessariò rectum consistere.[70])

Hoc enim Theoremate 3° h. lib. demonstratum fuit de omnibus quae inclinare possunt rectangulis, quare et quadrato convenit.

Fig. 20.



2.

Latere KV, praeterquam in Q, diviso in quatuor aequalia punctis O, P et S; si habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem majorem subsesquitertiâ[$\frac{3}{4}$], id est, majorem quàm OV ad KV, minorem verò quam QV ad KV; vel minorem subquadrupla[$\frac{1}{4}$], id est, minorem quam OK ad KV, majorem vero quam QK ad KV, majorem vero quam QR ad KV; et liquido supernatans ponatur incli-

[70]) La „Conclusio" nous apprend que la position, dans laquelle les côtés du carré se trouvent respectivement dans les situations horizontales et verticales, sera stable toutes les fois que le point représentatif tombe sur l'une des lignes BE ou GC du Tableau, c'est-à-dire toutes les fois que la densité relative est plus petite que $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0,211..$ ou plus grande que $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0,788..$

natum, ita ut neutrum oppoſitorum laterum contingat liquidi ſuperficiem; neque rectum reſtituetur neque inclinatum manebit, niſi cum axis AB cùm liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo invento ut in Theor. 5°. [71])

Primò quia OV eſt $\frac{3}{4}$ lateris KV et OK ejusdem $\frac{1}{4}$, erit rectang. KOV $\frac{3}{16}$ quadrati KV vel MV, ideoque majus quàm $\frac{1}{8}$ ejusdem quadrati, id eſt, rectangulo KQV; unde patet punctum O propius eſſe medio lateris KV quàm punctum Q, ideoque quadratum KM ad liquidum in gravitate poſſe habere rationem, quae major ſit eâ quam OV, minor autem eâ quam QV habet ad KV, vel quae minor ſit eâ quam OK, major autem eâ quam QK habet ad KV.

Sumpto itaque puncto α ubivis inter Q et O, habeat quadratum ad liquidum in gravitate primùm rationem quam αV ad KV; et ductâ αL parallela YK, veniat ex interſectione E linea EC, ita ut ſpatii comprehenſi Cα quadratum ſit duplum exceſſus ſeſqualteri rectanguli AEB ſupra quadratum AK. [72])

Dico quadratum KM, liquido ſupernatans et poſitum inclinatum, ita ut neutrum oppoſitorum laterum YK vel MV contingat liquidi ſuperficiem, neque rectum reſtitutum iri, neque manſurum inclinatum, niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel ECα.

Primò enim quia quadratum ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor eſt eâ quam QV, major verò eâ quam QK habet ad KV, non poterit quidem rectum reſtitui. [a] [73])

deinde quia rectangulum KOS eſt $\frac{1}{8}$ quadrati KV ſive MV, erit rectang. KαS minus quàm $\frac{1}{8}$ quadrati MV; unde ſicuti in concluſione 3[a] Theorematis praecedentis demonſtrari poterit quadratum KM non eousque inclinari poſſe ut baſis YK ullo modo contingat liquidi ſuperficiem.

Ergo quadratum neque rectum reſtituetur, neque ita conſiſtet ut alterutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; quòd autem angulus, quem, conſiſtente quadrato, axis AB faciet cum liquidi ſuperficiem aequalis futurus ſit angulo AEC vel ECα, demonstrari poteſt ſicuti in Theorem. 5° h. lib.

Quod ſi quadratum ſit ad liquidum in gravitate ut αK ad KV, inverſa intelligatur figura praecedens, et ſimilis omnino erit demonſtratio, niſi quod tum pars ea demerſa erit quae in caſu praecedenti enatabat.

---

[71]) La „Conclusio" exprime que le carré prendra la position (2), identique ici avec la position (4), toutes les fois que le point représentatif tombera sur l'une des lignes EH ou NG du Tableau de l'Avertissement, c'est-à-dire, toutes les fois que la densité sera comprise entre les limites $\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}211..$ et $\frac{1}{4}$, ou bien entre les limites $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{3} = 0{,}788..$ et $\frac{3}{4}$.

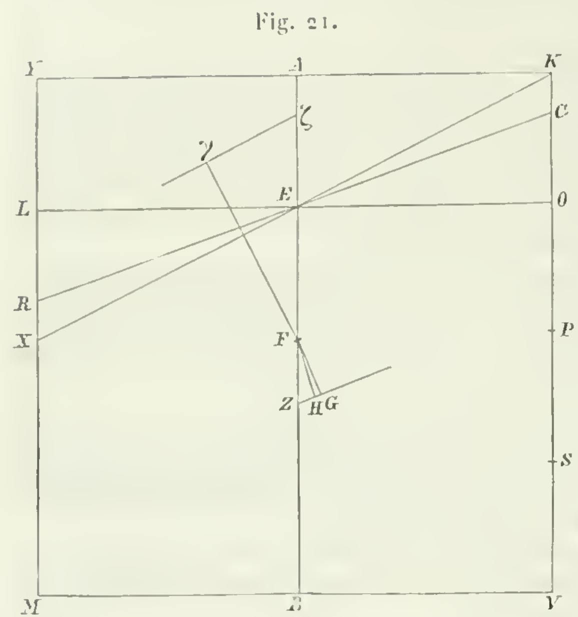
[72]) C'est la définition de l'angle AEC sous lequel le carré flottera. Elle nous donne: $\cot^2 AEC = 12\varepsilon(1 - \varepsilon) - 2$. Comparez la note 34.

[73]) „*a* per conv. theor. 3. h. lib." [Huygens].

3.

Latere KV diviso, ut supra, in quatuor aequalia punctis O, P et S; Si habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam OV ad KV, id est, subsesquitertiam [$\frac{3}{4}$]; vel quam OK ad KV, id est, subquadruplam [$\frac{1}{4}$], et liquido supernatans ponatur inclinatum ita ut neutra basium oppositarum contingat liquidi superficiem; eousque ultro inclinabitur, donec unus angulorum sit in liquidi superficie.[74])

Fig. 21.



Primùm habeat quadratum KM ad liquidum in gravitate proportionem subsesquitertiam, id est, quam OV ad KV. dico si liquido supernatet et ponatur inclinatum ita ut liquidi superficies sit RC, ultro eousque inclinaturum, donec angulus K sit in liquidi superficie, eaque sit KX.

Constructio enim eadem sit quae in conclusione 2ª. Theor. praecedentis et eadem quoque erit demonstratio. Nimirum quia hic rectangulum sub YL et excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, id est, rectang. KOS, aequale est octavae parti quadrati KV sive MV, incidet $F\gamma$, quae perpendicularis est ad $\gamma\zeta$, in ipsum centrum grav. trianguli XYK; quare quum superficies liquidi erit KX, quadratum KM ad neutram partem magis inclinabit, ideoque tum consistet, quod erat demonstrandum.

Si verò quadratum ad liquidum in gravitate sit ut OK ad KV, tum praecedens figura inversa intelligatur, et eadem rursus erit demonstratio, quae fuit conclusionis 2ᵃᵉ. Theorematis praecedentis, nisi quod triangulum XYK quod modo enatabat, nunc demersum futurum sit.

---

74) La „Conclusio" nous fait connaître sous quelles conditions le carré prendra une des positions intermédiaires entre les positions (3) ou (3)′ et les positions (2) et (4), dont les dernières sont identiques entre elles, c'-est-à-dire telle que l'un des sommets du carré se trouve dans le niveau du liquide. Le point représentatif se placera alors à l'un des points H ou N du Tableau de l'Avertissement.

4.

Si quadratum ad liquidum in gravitate habeat proportionem ſubduplam, et liquido supernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutrum oppoſitorum laterum contingat liquidi ſuperficiem, eousque ultro inclinabitur donec duo anguli oppoſiti ſint in liquidi ſuperficie.[75])

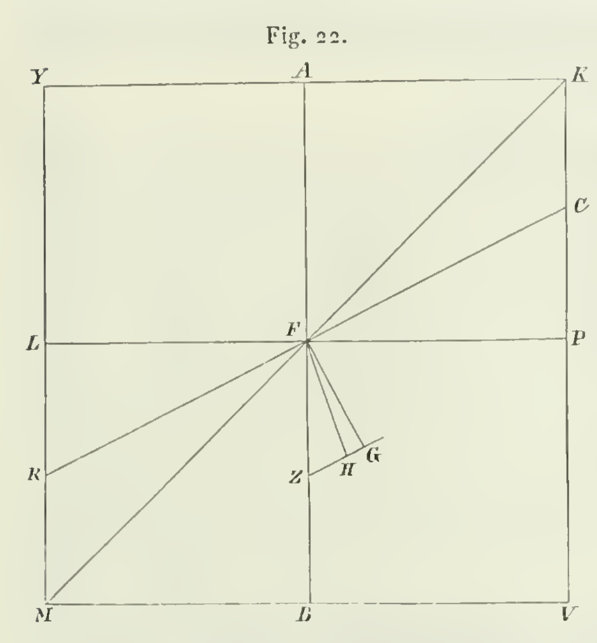


Fig. 22.

Habeat quadratum KM ad liquidum in gravitate proportionem ſubduplam, id eſt, quam PV ad KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ut liquidi ſuperficies ſit RC: dico eousque ultro inclinatum iri, donec anguli oppoſiti K et M ſint in liquidi ſuperficie, atque ea ſit KM.

ducatur enim PL parallela YK, et per H, centrum grav. trapezii RCVM, linea ZHG parallela RC, in eamque ex F centro quadrati cadat perpendicularis FG: denique jungatur FH.

Quia igitur trapezium RCVM aequale eſt dimidio quadrati KM [a 76]) id eſt rectangulo PM, ſequitur ſuperficiem liquidi RC tranſire per F centrum quadrati. Rectangulum autem AFB aequale eſt quadrato AF; ergo erit ſesquialterum rectanguli AFB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati AF ſeu KP aequale quadrato AF ſive AK. quare ſesquialterum rectanguli AFB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CP, majus erit quadrato AK: ideoque in linea ZG erit ſpatium ZG majus ſpatium ZH [b 77]) Ergo quum FG ſit perpendicularis in ZG et conſequenter in liquidi ſuperficiem RC, in eandem

---

75) La „Conclusio” se rapporte au cas spécial où la densité relative du parallélipipède est égal à $\frac{1}{2}$. Elle démontre qu'alors la position dans laquelle deux sommets opposés du carré se trouvent au niveau du liquide, est une position stable. Inutile de dire que le point représentatif du Tableau de l'Avertissement se trouve alors en L.

76) „*a* Theor. 4. lib. 1.” [Huygens].

77) „*b* lemm. 2 h. lib.” [Huygens].

non erit perpendicularis FH, quae jungit centr. grav. totius quadrati cum centro grav. partis merſae RCVM. Quamobrem totum quadratum inclinabit in quam partem inclinat linea FH c [78]), deſcendetque verſùs K, et aſcendet verſùs M, idque donec anguli K et M ſint in liquidi ſuperficie, atque ea ſit KM.

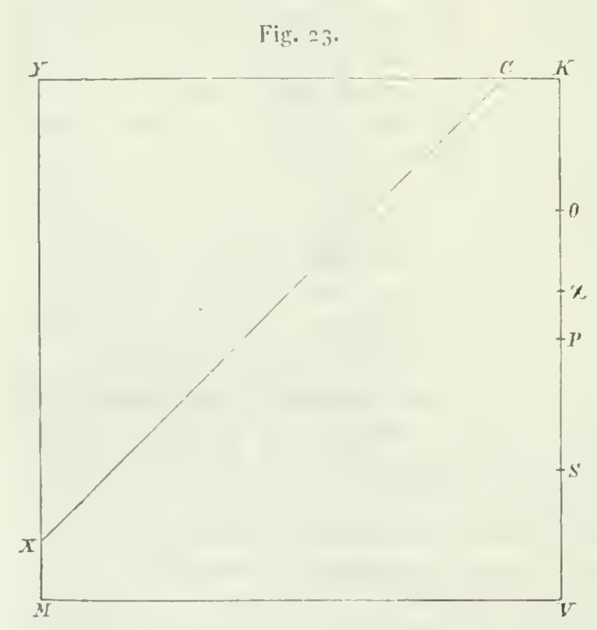
Et tum quidem manifeſtum eſt quadratum ampliùs inclinari non poſſe. nam ſi dicatur angulum K demerſum iri, M verò emerſum, ſimili omnino demonſtratione evincetur, quadratum inclinatum iri retrorſum, donec ijdem anguli K et M ſint denuo in liquidi ſuperficie.

Si igitur quadratum ſubduplam proportionem habeat ad liquidum in gravitate &c. quod erat demonſtr.

5.

Diviſo latere KV in quatuor aequalia punctis O, P et S, ſumptoque puncto χ ubivis inter O et P, habeat quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam χV ad KV, id eſt, majorem ſubduplâ, minorem autem ſubſeſquitertiâ[$\frac{3}{4}$]; et liquidi ſupernatans ponatur tribus angulis merſis K, V et M, ita ut ſuperficies liquidi ſit XC: dico nullum trium angulorum emergere poſſe ſupra liquidi ſuperficiem. [79])

Fig. 23.



Hoc demonſtrari poterit ſicut concluſio 4a Theorematis praecedentis. nam ſicuti illìc ſingula rectangula KDS, KTS aequalia erunt octavae parti quadrati MV, ita hic rectangula KOS et KPS.

[78]) „c Theor. 1. h. lib." [Huygens].

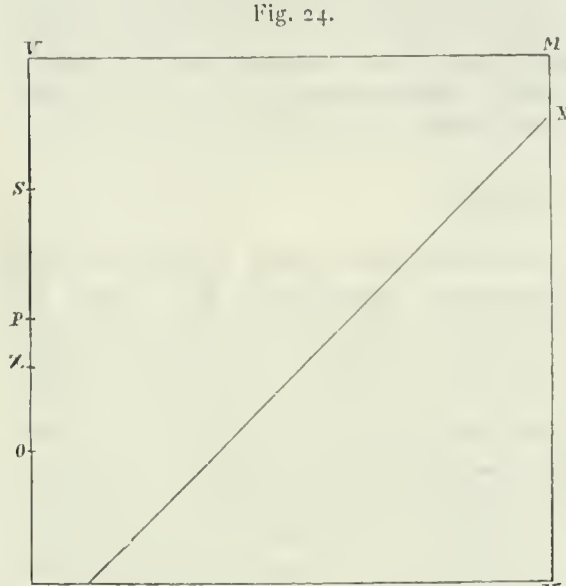
[79]) La „Conclusio" indique que le carré prendra la position (3) toutes les fois que le point représentatif est situé sur la ligne BC du Tableau de l'Avertissement entre les points L et N, c'est-à-dire toutes les fois que la densité relative du parallélipipède flottant tombe entre les limites $\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$.

Or, quoique cette assertion soit correcte, il y avait lieu ici de distinguer encore entre les parties LQ et QN de la ligne LN. En effet, tant que le point représentatif tombe dans la

6.

Si quadratum ad liquidum in gravitate proportionem habeat majorem ſubquadruplâ, minorem verò ſubduplâ, et liquido ſupernatans ponatur ita ut unus tantùm angulus demerſus ſit, reliqui verò enatent ſupra liquidi ſuperficiem, nullus eorum demergi poterit. [80])

Fig. 24.



Invertatur figura praecedens, habeatque quadratum ad liquidum in gravitate proportionem quam χK ad KV; et liquido ſupernatans demerſo tantùm angulo Y, enatantibus verò K, V et M: dico nullum eorum demergi poſſe.

Hoc autem demonſtratur ſicuti concluſio 5ª Theorematis praecedentis.

---

partie LQ, le carré se placera de telle manière que ses diagonales sont respectivement dans la situation horizontale et verticale. Dans le cas contraire, où le point tombe entre Q et N, les diagonales prendront une situation inclinée.

Et cette distinction n'aurait pu échapper à Huygens, si l'idée lui était venue comme plus tard à Euler (voir les pages 110—113 du Tome I de l'ouvrage cité dans la note 18, p. 126), de rechercher entre quelles limites de la densité ε, la position avec les diagonales dans la situation horizontale et verticale était une position stable. Il aurait trouvé alors pour ces limites les valeurs $\frac{9}{32}$ et $\frac{23}{32}$ correspondant aux points P et Q du Tableau.

Ajoutons encore qu'une solution complète du cas du carré avec discussion de la stabilité pour toutes les positions d'équilibre a été donnée en 1849 par J. Badon Ghijben aux pages 17—24 de l'article: „Over de Stabiliteit des evenwigts, bij drijvende ligchamen", Tijdschrift voor de wis- en natuurkundige wetenschappen, uitgegeven door de eerste klasse van het Koninklijk-Nederlandsche Instituut. T. 3, 1850, Amsterdam.

[80]) La „Conclusio" se rapporte à la position (3)′ qui pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif tombe sur la division HL de la ligne BC du Tableau. Ici il y a lieu de distinguer entre la partie PL, où le point représentatif indiquera une position du carré aux diagonales verticale et horizontale, et la partie PH à laquelle correspondent des positions dans lesquelles les diagonales sont inclinées.

Theorema [8]. [81])

Rectangulum cujus basis minor est latere, liquido supernatans demersâ base et positum inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; aliquando rectum restituetur; aliquando inclinatum manebit, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem. Interdum eousque inclinabitur donec angulorum unus sit in liquidi superficie; ut plurimùm denique ulteriùs adhuc inclinabitur: Pro diversâ proportione quam ad liquidum habebit in gravitate. [82])

Conclusio 1.

Fig. 25.



Esto rectang. KM cujus latus KV majus sit base MV; Et latere KV diviso in Q, ita ut rectang. KQV aequetur sextae parti quadrati MV vel YK, habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam QV habet ad KV, vel minorem quam QK habet ad KV. dico, si liquido supernatans, ponatur inclinatum, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectum restitutum iri. [83])

Hoc enim Theor.e 3° h. lib. demonstratum fuit de omnibus rectangulis quae inclinare possunt.

[81]) Le manuscrit a „Theorema 7." Le changement a été rendu nécessaire par celui indiqué dans la note 68.

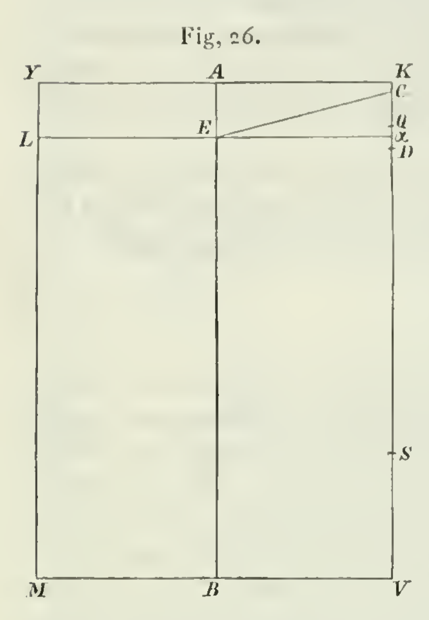
[82]) Le théorème se rapporte à toutes les formes possibles de la section verticale rectangulaire du parallélipipède flottant, à l'exception seulement de la forme carrée. Il y est question surtout des positions (4) et (5), indiquées dans l'Avertissement, lesquelles n'ont pas encore été traitées expressément. Voir, pour les détails, les „Conclusiones" qui suivent. A propos de la dernière „Conclusio" nous indiquerons le lieu précis où les lignes de démarcation OP et QA du Tableau, desquelles l'existence est ignorée dans les recherches de Huygens, se présentent logiquement, si l'on poursuit la marche de ses recherches; voir les notes 92 et 93.

[83]) La „Conclusio" nous apprend que la position (5) sera une position stable, tant que le point réprésentatif tombera dans l'une des divisions BEO ou CGA du Tableau de l'Avertissement. Comparez le dernier alinéa de la note 23.

2.

Latere KV, diviso ſicut ſupra in Q, et praeterea in S et D, ita ut KS quidem ſit $\frac{3}{4}$ KV, rectang. verò KDS (ſumpto puncto D magis versùs K quàm verſùs S) aequale octavae parti quadrati baſis MV; ſi habeat rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem majorem quàm DV ad KV, minorem verò quam QV ad KV; vel majorem quidem quam QK ad KV, minorem verò quàm DK ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, neque rectum reſtituetur, neque inclinatum manebit, niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo invento ut in Theor. 5° h. lib.[84])

Fig, 26.



Quòd autem hi caſus quandoque locum habere poſſint, ſic oſtenditur. Quum rectang. VQK ſit ad SQK, ut VQ ad SQ, et VQ ad SQ majorem habeat rationem quam VK ad SK, id eſt majorem quam 4 ad 3, etiam rectang. VQK ad SQK majorem habebit rationem quam 4 ad 3 ſive quàm $\frac{1}{6}$ ad $\frac{1}{8}$; ergo quum rectang. VQK ſit $\frac{1}{6}$ quadrati MV, erit rectang. SQK minus quàm $\frac{1}{8}$ ejusdem quadrati MV : Ergo minus quoque rectangulo SDK; unde ſequitur punctum D propiùs eſſe medio lineae KS quam punctum Q. Quamobrem poterit quidem rectang. ad liquidum in gravitate habere proportionem quae major ſit eâ, quam DV, minor veró eâ, quam QV habet ad KV; vel quae major quidem ſit eâ quam QK, minor autem eâ quam DK habet ad KV.

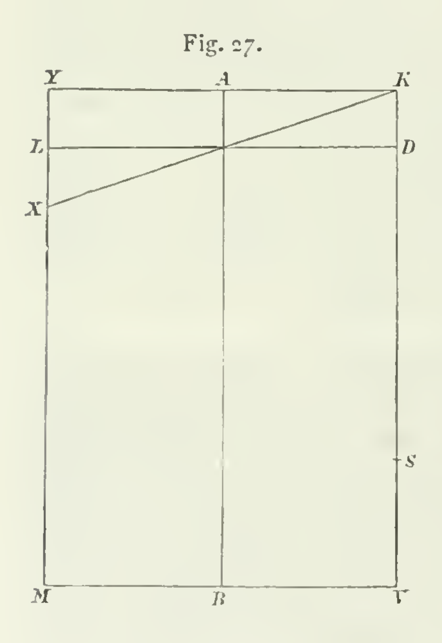
[84]) La „Conclusio" démontre que la position ④ pourra se présenter toutes les fois que le point représentatif (ε, η) se trouve à l'intérieur de l'une des divisions NGA ou EHO du Tableau de l'Avertissement. En effet, les équations $\eta^2 = 2(1-\varepsilon)(4\varepsilon - 1)$ et $\eta^2 = 2\varepsilon(3 - 4\varepsilon)$ des courbes NA et HO se déduisent de la même manière des données de la „Conclusio", lesquelles se rapportent au point D, que les équations des courbes LMN et HKL des données de la „Conclusio 2" du „Theorema 6"; voir la note 43, p. 138. On doit seulement observer que les lettres a et b ont changé de rôle, puisqu'on a maintenant $a =$ KV, $b =$ MV, de manière que, dans les équations de la note 43, on doit remplacer η par η^{-1}.

Sumpto itaque puncto α ubivis inter Q et D, habeat rectang. ad liquidum in gravitate primùm rationem quam αV habet ad KV; et ductâ αL parallelâ KY, veniat ex interſectione E linea EC, ita ut spatii comprehenſi αC quadratum ſit duplum exceſſus ſeſquialteri rectanguli AEB ſupra quadratum AK. [85])

dico rectang. KM liquido ſupernatans et poſitum inclinatum, ita ut baſis YK non contingat liquidi ſuperficiem, neque rectum reſtitutum iri, neque inclinatum manſurum, niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel ECα.

Demonſtratur autem hoc eodem modo quo Concluſio 3a Theorem. 6i. Quòd ſi rectang. ad liquidum in gravitate habeat proportionem quam αK habet ad KV, tum inverſa intelligatur figura praecedens et rurſus ſimilis erit demonſtratio.

Fig. 27.



3.

Latere KV diviſo ſicut Concl. praecedenti in S et D, nempe ut KS ſit $\frac{3}{4}$ lateris KV, rectang. verò KDS aequale $\frac{1}{8}$ quadrati MV; habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem quam DV habet ad KV, vel quam DK ad KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem. dico eouſque inclinatum iri donec unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [86])

Hoc autèm eodem modo demonſtratur quo Concluſio 2a Theorem. 6i.

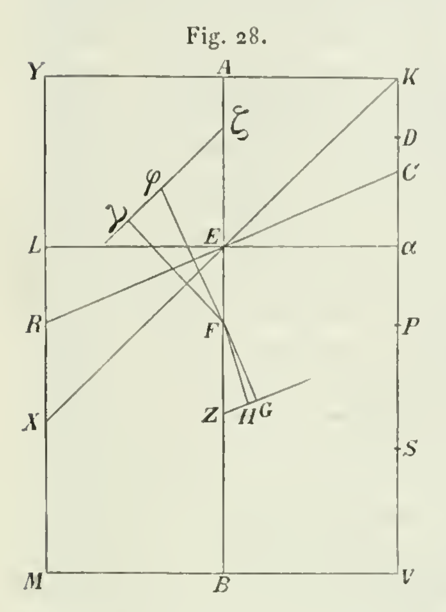
[85]) C'est la définition de l'angle AEC, qui n'est autre que l'angle que l'axe du parallélipipède flottant fera dans la position (4) avec le niveau du liquide. On trouvera pour sa valeur $\cot^2$. AEC $= 12\varepsilon(1-\varepsilon)\eta^{-2} - 2$, où $\eta = b : a =$ MV : KV. Comparez la note 34, p. 134.

[86]) Dans cette „Conclusio" il s'agit des cas, où le point représentatif tombera justement sur l'une des lignes de démarcation NA ou HO du Tableau de l'Avertissement. Elle nous apprend qu' alors le parallélipipède flottant prendra l'une des positions intermédiaires entre les positions (3) et (4) (pour NA), ou (3)′ et (4) (pour HO), c'est-à-dire telle que l'un des sommets du rectangle se trouve dans le niveau du liquide. Consultez encore la dernière phrase de la note 43.

4.

Diviso rurſus latere KV in S et D; ita ut KS ſint $\frac{3}{4}$ KV, rectang. verò KDS aequale $\frac{1}{8}$ quadrati MV; Si habeat rectang. ad liquidum in gravitate proportionem minorem quidem eâ, quam DV, majorem verò eâ, quam DK habet ad KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatum, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, ulteriùs adhuc inclinabitur, quàm ut unus angulorum ſit in liquidi ſuperficie. [87])

Fig. 28.



Dividatur latus KV bifariam in P, et quum manifeſtum ſit rectangulum ad liquidum in gravitate habiturum proportionem majorem vel non majorem ſubduplâ, habeat primò majorem ſubduplâ, nempe eam, quam αV habet ad KV, (ſumpto puncto α intra P et D,) et liquido ſupernatans, poſitum ſit inclinatum, ita ut liquidi ſuperficies ſit RC. dico ulteriùs inclinatum iri, quam ut angulus K ſit in liquidi ſuperficie. Sit enim αL parall. KY, et per interſectionem E ducatur ex angulo K linea KEX. Porrò ſit H centr. gravitatis trapezii RCVM, per quod agatur recta ZHG parall. RC, in eamque ex F, centro rectanguli KM, cadat perpendicularis FG, et jungatur FH. Item ſit φ centr. grav. trianguli XYK, et per ipſum agatur ζφγ parallela KX, in eamque cadat perpend. Fγ; et denique jungatur Fφ.

Quoniam igitur rectangulum KM eſt ad liquidum in gravitate ut αV ad KV, ſive ut rectang. αM ad KM, atque ita etiam trapezium merſum RCVM ad rectang. KM[a] [88]), ſequitur idem trapezium RCVM rectangulo αM aequale eſſe, ac proinde

[87]) La „Conclusio" démontre que, tant que le point représentatif tombera dans la division OHNAO du Tableau de l'Avertissement, le parallélipipède flottant ne pourra jamais rester dans la position ④, indiquée dans l'Avertissement. S'il est mis dans une telle position, l'axe AB, c'est-à-dire le grand axe de la section verticale, tendra à s'éloigner de plus en plus de la position verticale, tout au moins jusqu'à ce qu'une position ③ ou ③′ soit atteinte. La „Conclusio", toutefois, ne nous apprend pas quelle sera la position d'équilibre à laquelle le parallélipipède finira par arriver, si l'on continue de le tourner dans ce même sens. Voir, à ce propos, les notes 92 et 93.

[88]) „a Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

lineas RC et αL in eodem puncto E secare axem AB. Porrò quum KP sit $\frac{1}{2}$ KV, et PS $\frac{1}{4}$ KV: erit rectang. KPS aequale $\frac{1}{8}$ qu. KV; latus autem KV per constr. majus est base MV, ergo $\frac{1}{8}$ quadr. KV, sive rectang. KPS majus quoque quam $\frac{1}{8}$ quadr. MV, sive quàm rectang. KDS: Ergo punctum P propius est medio lineae KS quàm punctum D, et quum punctum α sit inter puncta P et D, erit hoc quoque propius medio lineae KS quam punctum D. Rectangulum igitur KαS, sive rectang. sub YL et sub excessu $\frac{3}{4}$ YM supra YL, majus est rectangulo KDS, sive octavâ parte quadrati MV: Ergo in lineâ $\gamma\zeta$ pars $\gamma\zeta$ major $\varphi\zeta$ *b* [89]), unde sequitur sesquialterum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ qu. LX, majus esse quadr.o AY sive AK *c* [90]); Ergo quum Cα sit minor quam LX sive αK, erit $\frac{3}{2}$ rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. Cα, multo majus quadrato AK: quare in lineâ ZG erit pars ZG major parte ZH *e* [91]). quum igitur FG sit perpend. ad ZG, et consequenter ad liquidi superf. RC, ad eandem superficiem perpendicularis non erit FH, quae jungit centr. grav. rectanguli KM cum centro grav. partis mersae RCVM, ideoque totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat linea FH, adeo ut descensurus sit angulus K; idque donec pervenerit usque in liquidi superficiem, eaque sit KX: sed tum quoque ulterius inclinabitur; nam quum jam ostensum fuerit in linea $\zeta\gamma$ partem $\gamma\zeta$ majorem esse parte $\varphi\zeta$, et Fγ sit perpendicularis ad $\zeta\gamma$, ideoque ad liquidi superficiem quae tum erit KX; in eandem superficiem non erit perpendicularis Fφ quae jungit centrum gravitatis rectanguli KM cum centro trianguli enatantis XYK; quamobrem totum rectangulum inclinabit in quam partem inclinat Fφ, et mergetur angulus K; quod erat demonstr. [92])

[89]) „*b* lemm. 3. h. lib." [Huygens].

[90]) „*c* per conv. lemm. 2. h. lib." [Huygens].

[91]) „*e*. lemm. 2. h. lib." [Huygens]. Une annotation „*d*" manque dans le texte comme en marge.

[92]) En effet, la démonstration est parfaite et nous fait connaître que le parallélipipède, parvenu à la position dans laquelle le sommet K de la section normale touche au niveau du liquide, tendra à continuer sa rotation. Il passera alors à la position (3); mais il est clair qu'ensuite plusieurs cas différents peuvent se présenter. En *premier lieu*, il se pourra qu'une (ou plus d'une) des positions (3) par lesquelles le parallélipipède passera en poursuivant sa rotation, soit une position d'équilibre stable dans laquelle il peut s'arrêter. C'est là ce qui en effet arrivera toutes les fois que le point représentatif (ε, η) tombe à l'intérieur de la division LMZANL du Tableau de l'Avertissement.

En *second lieu*, il se peut que le parallélipipède en parcourant les positions (3) ne rencontre aucune position d'équilibre stable. Alors il passera aux positions (2) et il est possible qu'il y trouve une position dans laquelle il pourra s'arrêter. Ce sera le cas tant que le point représentatif tombe à l'intérieur de la division LMZDFL.

En *troisième* et *dernier lieu*, il est possible que le parallélipipède ne rencontre aucune position d'équilibre stable avant d'avoir atteint la position (1). C'est ce qui arrive si le point représentatif se trouve à l'intérieur de la division ΓFDAΓ.

Pour connaître les conditions sous lesquelles ces divers cas se présenteront, on doit étudier

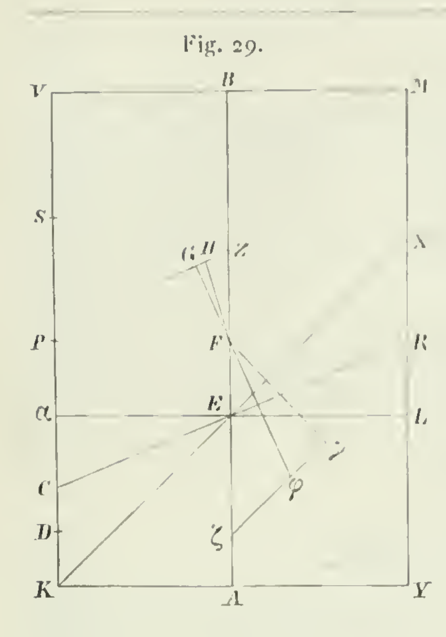


Fig. 29.

Quod ſi rectangulum ad liquidum in gravitate proportionem habeat minorem ſubdupla, tum inverſa intelligatur praecedens figura, et eadem quoque erit demonſtratio, niſi quod hìc partes eae merſae erunt quae iſtic enatabant, et contra; quodque hic oſtenditur angulum K emergere debere ſuprà liquidi ſuperficiem. [93])

Manifeſtum autem eſt, ſiquidem quadratum lateris KV ad quadratum baſis MV non majorem habeat rationem quam novem ad octo, tum Concluſiones duas ultimas Theorematis 6.i [94]) hic quoque poſſe habere locum, ſi accedat debita proportio rectanguli ad liquidum in gravitate.

---

les positions d'équilibre qui se trouvent parmi les positions (3). Or, la détermination de ces positions dépend de la résolution d'une équation du quatrième degré, c'est-à-dire, elle constitue ce qu'on appelait à l'époque de Huygens un problème solide. Pour cette raison ou pour une autre, Huygens n'a pas entamé ce problème et par suite aucun de ses résultats n'est en rapport avec la ligne de démarcation QA relative au problème mentionné. Voir encore le dernier alinéa de la page 88 de l'„Avertissement."

[93]) Ici des considérations analogues à celles de la note précédente, sont valables. On n'a qu'à changer (3) en (3)′ et à remplacer les différentes divisions du tableau par celles qui leur sont symmétriques par rapport à l'axe de symmétrie du tableau. De même la ligne QA par PO.

[94]) Il s agit des „Conclusiones 4 et 5" expliquées dans les notes 57 et 67 et qui se rapportent aux positions (3) et (3)′ que le parallélipipède flottant pourra prendre toutes les fois que le point représentatif tombe à l'intérieur des divisions respectives LMN et HKL.

DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

LIBER III.[1])

De Cylindris.

Quae de Cylindris natantibus propofiturus fum, explicari nequeunt nifi cognitis prius portionum cijlindri centris gravitatum, quae quum nemo adhuc, quod sciam, invenerit, neceffario hic praemittenda exiftimavi. Verùm ut quam minimum à propofita materia recederem, neglexi in hisce quidem longiorem fed et optimam demonftrandi methodum quae fit deductione ad abfurdum, eamque potius fecutus fum quâ primùm Cavalerius ufus fuit, [2]) plurimis poftea Geometris probatam, quam etiamfi non putem legitimae demonftrationis loco habendam, (revera enim tantùm oftendit quâ ratione quid demonftrari poffit), tamen hìc eam adhibere satius duxi, propter infignem ejus brevitatem.

Definitiones.

Cylindri appellatione intelligatur Cylindrus rectus.

Portiones Cylindri vocentur, quae fiunt cum Cylindrus fecatur plano, neutram bafium vel parallelam habente vel fecante.

Cuneus Cylindricus appelletur, Portio cujus bafes fe mutuo contingunt.

---

[1]) Le troisième livre traite l'équilibre du cylindre droit flottant. De plus on y trouve vers la fin des indications sur la manière dont les résultats obtenus dans les trois livres pourraient être vérifiés expérimentalement.

[2]) L'Appendice IV contient une détermination du centre de gravité d'un tronc de cylindre droit, indépendante de la méthode de Cavalieri. Voir sur cette dernière méthode la note 8 de la page 60 du volume présent.

Manifesta.

His conſtitutis, illa quidem tanquam demonſtratione non egentia pro veris habeantur; nempe quod in portione Cylindri, latera maximum et minimum ſint è diametro oppoſita; ſicut in Cuneo, angulus contactus baſium et latus ſive maxima altitudo. Item portionem, ſi plano ſecundum longitudinem utriusque lateris ſecetur, dividi in ſegmenta duò aequalia et ſimilia: Et Cuneum ſimiliter dividi ſi ſecetur plano per punctum contactus baſium et ſecundum latus oppoſitum. Denique quod ſi Cylindrus plano per oppoſitos angulos ſecetur, futuri ſint duo cunei ſimiles et aequales, ideoque ſinguli aequales dimidio cijlindri cujus ſunt partes. Ex quo colligitur Cuneos ex eodem cylindro inter ſe rationem habere quam eorundem altitudines ſive latera.

Theorema 1.

Cunei Cylindrici centrum gravitatis eſt in linea quae pertingit a puncto contactus baſium ad medium latus oppoſitum.

Eſto Cuneus ABC, cujus baſes AECF, ADBG: ab harum contactu A ducatur AK quae latus oppoſitum BC bifariam dividat. dico centrum grav. Cunei ABC eſſe in linea AK.

Fig. 1.

Intelligatur enim Cuneus ſecari plano ABC per latus BC et contactum A, in quo plano manifeſtum eſt fore lineam AK. Item ubicunque ſectus ſit plano DGEF, recto ad baſin circularem AECF, et planum ABC ſecante ad angulos rectos ſecundum lineam IL, quae idcircò perpendicularis erit ad planum AECF [a 3]).

Eſt igitur ſectio DGEF rectangulum, cujus latera oppoſita FE, DG, bifariam dividuntur ab interſectione IL, ideoque ipſa IL à centro gravit. rectanguli DGEF quod eſt H bifariam dividitur [b 4]): ſed eadem quoque bifariam ſecatur à rectâ

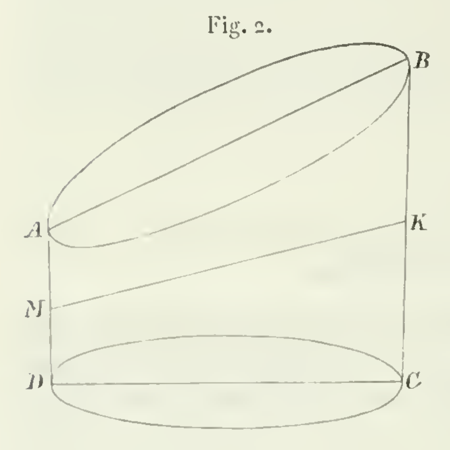
---

3) Huygens ajoute en marge „*a* pr. 19. lib. 11. Elem.", où l'on lit (voir l'ouvrage cité dans la note 10, pag. 97): „Si duo plana se mutuo secantia, plano cuidam ad rectos sint angulos, communis etiam illorum sectio ad rectos eidem plano angulos erit."

4) „*b* pr. 10. lib. 1. Arch. Aequipond." [Huygens]. Voici la „propositio" en question: „Cuiusuis parallelogrammi centrum grauitatis id punctum est, in quo diametri inter se concurrunt." Voir p. 165, T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2 de la page 50 du Tome présent. La lettre H, indiquant le point d'intersection des lignes AK et IL, manque dans la figure achevée (voir la page 90 de l'Avertissement), quoiqu' elle soit présente dans la figure du manuscrit.

AK, (nam quum LI fit in plano triangulari ABC, et perpendicularis ad planum AECF, ideoque parallela lateri BC, fequitur eam ita ut BC dividi à linea AK) ergo H centrum grav. rectanguli DGEF eft in AK. Quum autem eodem modo demonftrari poffit omnium rectangulorum quae fiunt fectionibus huic parallelis, centra gravitatis effe in eadem rectâ AK, concludimus inde totius Cunei ABC, qui quafi ex innumeris talibus rectangulis conftat, in linea AK effe centrum grav. quod erat oftendendum.

Fig. 2.

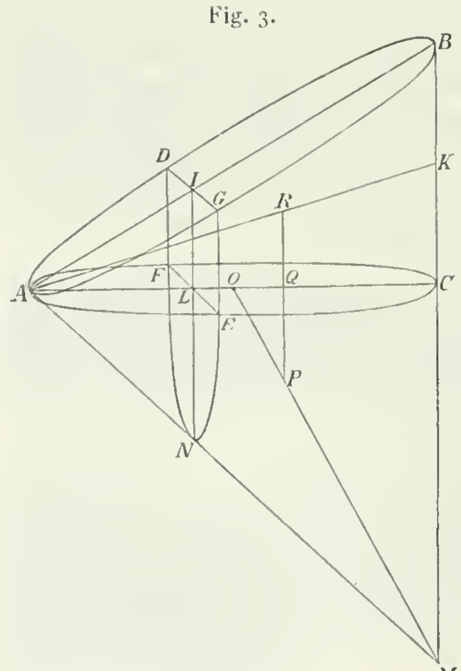


THEOREMA 2.

Portionis Cijlindri centrum gravitatis eft in linea, quae pertingit à medio minoris lateris ad medium majoris.

Sit Cijlindri portio ABCD, cujus latera maximum et minimum bifariam dividat linea MK. dico centrum grav. portionis ABCD effe in eâdem MK. Similis autem hujus demonftratio eft quae Theorematis praecedentis.

Fig. 3.



THEOREMA 3.

Cunei Cylindrici centrum gravitatis, lineam à contactu bafium ad medium latus oppofitum pertingentem ita dividit, ut pars verfus contactum ad reliquam fit ut quinque ad tria.

Sit Cuneus ABC cujus bafes AB, AC fe mutuò contingant in A puncto, atque hinc ducatur AK, latus oppofitum BC bifariam dividens. Porro producto latere BC verfus M, donec CM fit fefquialtera [$\frac{3}{2}$] CB, intelligatur conus AMC fcalenus, cujus bafis circulus AECF, eadem quae cunei ABC. Et fecentur Cuneus et conus primùm plano ABCM, per contactum A et latus BC tranfeunte, deinde ubicunque plano DGENF, recto utrinque ad communem bafin AECF, ut et ad planum ABCM;

eritque ſectio quidem cunei rectangulum DE, coni autem ſectio parabolé ENF, quoniam lateri CM facta eſt parallela.

Sit coni AMC axis MO, cujus ſumantur tres quartae MP, et erit P centrum grav. in cono, hoc enim à Commandino demonſtratum eſt. [5]) ducatur denique PQR aequidiſtans ipſi BM.

Quum igitur CM ſit ſeſquialtera CB, erit quoque LN ſeſquialtera LI, ideoque parabole FNE aequalis rectangulo DE, ut patet ex quadratura paraboles. [6]) Haec autem aequalitas eodem modo oſtendi poteſt, ubicunque cuneus et conus ſecti fuerint eodem plano, quod parallelum ſit plano DGENF. Quare ſi AC conſideretur tanquam libra horizonti parallela, apparet infinitas numero parabolas, parabolae FNE aequidiſtantes, quae ex libra AC ſupenſae conum AMC quodammodo conficiunt, ex eodem puncto aequiponderare debere, quo aequiponderant infinita rectangula eidem librae ſuperimpoſita, quae ſimiliter componunt cuneum ABC.

Conus autem id eſt omnes, quas dixi, parabolae, aequiponderant ex puncto Q, (quia perpendiculum QP tranſit per coni gravitatis centrum) ergo et omnia rectangula, ſive cuneus ABC aequiponderat ex eodem Q puncto; unde ſequitur perpendiculum QR, tranſire per centrum gravitatis cunei ABC. Sed et linea AK tranſit per ejusdem cunei centrum gravitatis: Igitur iſtud centrum eſt in interſectione R. Quum vero MP ſit $\frac{3}{4}$ MO, eſt quoque CQ $\frac{3}{4}$ CO; CO autem dimidia eſt CA; ergo CQ tres octavae diametri AC. Et quia QR, CK ſunt parallelae, eſt KR ad KA ſicut CQ ad CA; igitur KR quoque tres octavae totius AK; Itaque qualium partium KR eſt trium, talium RA eſt quinque: Ergo cunei ABC centrum gravitatis R lineam AK ita dividit ut pars verſus contactum baſium ſit ad reliquam, ſicut quinque ad tria: quod erat demonstr.

Theorema 4.

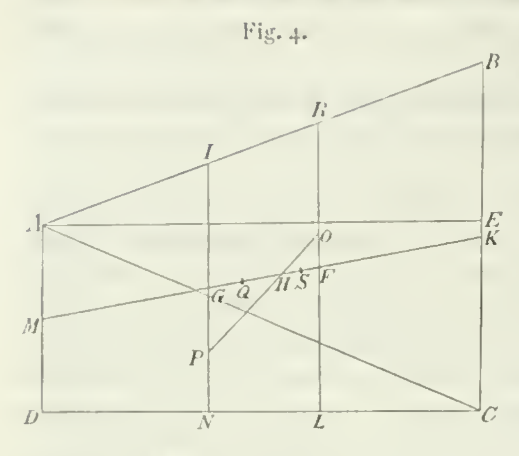
Portionis Cylindri centrum gravitatis, lineam, quae à medio majoris lateris ad medium minoris pertingit, ita dividit, ut pars, quae eſt verſus minus latus, ad reliquam rationem habeat, quam quintuplum majoris lateris cum triplo minoris ad quintuplum minoris cum triplo majoris.

Sit Cylindri portio ABCD, cujus bases circ. diametro DC et Ellipſis diametro AB, lateribus autem BC et AD diviſis biſariam punctis K et M, jungantur ipſa

[5]) Dans l'ouvrage: „Federici Commandini Urbinatis Liber de Centro Gravitatis Solidorum. Cum privilegio in Annos X. Bononiae. Ex Officina Alexandri Benacii. MDLXV." 4°. On y trouve à la page 27 verso le „Theorema XVIII. Propositio XXII. Cuiuslibet pyramidis, & cuiuslibet coni uel coni portionis axis à centro grauitatis ita diuiditur, ut pars, quae terminatur ad uerticem reliquae partis, quae ad basim, sit tripla."

[6]) Voir p. e. les pages 56—58 du Tome présent.

Fig. 4.



rectâ KM. Oſtendendum eſt, centrum grav. portionis ABCD ita dividere lineam KM ut pars verſùs M ad eam quae verſùs K, rationem habeat quàm quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC.

Secta intelligatur portio primum plano ABCD ſecundum latus utrumque; deinde planis AE, AC, rectis ad planum ABCD, quorum AE baſi DC ſit parallelum, AC verò ab angulo A ad C pertingat. Porrò ſumantur KF, MG, ſingulae aequales $\frac{3}{8}$ MK; et ducantur RFL, IGN parallelae lateribus portionis.

Conſtat igitur portio ABCD ex tribus Cuneis ABE, ACE, ACD, et cunei quidem ABE centr. gr. eſt in lineâ RL[a 7]) ſicut et cunei ACE, (quia videlicet CL eſt $\frac{3}{8}$ CD,) quare totius partis ABC centr. gr. erit in eâdem RL, inveniatur hoc et ſit punctum O. Similiter erit centr. gr. cunei ACD in recta IN, ſitque hoc P. Junctis igitur O et P, erit centrum grav. totius portionis ABCD in lineâ OP. Sed idem quoque eſt in lineâ MK[b 8]), ergo erit interſectio H centrum grav. portionis ABCD. dividantur jam partes GH, HF, biſariam in Q et S. Eſt igitur PH ad HO ut pars ACB ad cuneum ACD, ſed pars ACD, id eſt duo cunei ABE, ACE, ſunt ad cuneum ACD ut duo latera BE et EC ad latus AD, ergo PH ad HO, ut tota BC ad AD: et ſic quoque GH ad HF; et tandem QH ad HS, ut BC ad AD. Ergo ſicut quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC, ita et quintupla QH cum triplâ HS ad quintuplam HS cum triplâ QH. Sed, quintupla QH cum triplâ HS eſt aequalis ipſi MH, et quintupla HS cum triplâ QH ipſi HK; nam quum MG et KF ſimul ſint $\frac{6}{8}$ ſive $\frac{3}{4}$ MK, erit GF $\frac{1}{4}$ MK, ideoque QH et HS quae ſimul faciunt $\frac{1}{2}$ GF, erunt $\frac{1}{8}$ MK; quare quintupla QH cum quintuplâ HS erunt $\frac{5}{8}$ MK, id eſt, aequales ipſi MF, unde detractâ FH, quae bis continet HS, relinquetur HM aequalis quintuplae QH cum triplâ HS. Et ſimiliter ſi ex MF, (quam diximus continere quintuplam QH cum quintuplâ HS) vel ex KG auferatur HG quae bis continet ipſam QH, relinquetur HK aequalis quintuplae HS cum triplâ QH. apparet igitur partem MH ad HK habere rationem, quam quintupla BC cum triplâ AD ad quintuplam AD cum triplâ BC; quod erat demonſtrandum.

---

7) „*a* Theor. 3. h. lib." [Huygens].

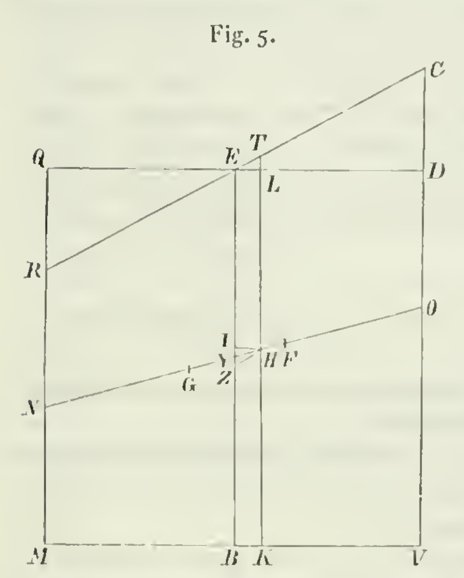
8) „*b* Theor. 2. h. lib." [Huygens].

LEMMA [9]).

Sit Cylindri portio RCVM, eìque aequalis cijlindrus QDVM super eâdem base MV; et constat quidem basium diametros, (in eodem existentes plano) QD et RC sese invicem per medium secare in E. Sit igitur EB axis cylindri QV, ejusdemque centr. grav. Y. Porrò sit H centr. grav. portionis RCVM, atque inde cadat HI perpendicularis in axem EB, et HZ parallela RC. dico, ut EB quater sumpta ad DC, ita esse EC ad HZ; et ita quoque DC ad IZ. Item IZ dividi bifariam ab Y centro grav. cylindri QV.

divisis enim lateribus RM et CV bifariam in punctis N et O, jungantur ea rectâ NO; et manifestum quidem est hanc transire tam per Y quàm per H centrum grav. portionis RCVM. Sint autem NG et OF singulae $\frac{3}{8}$ NO; et denique per H agatur TLHK parallela axi EB.

Fig. 5.



Quia igitur H est centr. grav. portionis RCVM, potest ostendi, sicut in Theoremate praecedenti, esse GH ad HF, ut CV ad RM. Ergo erit quoque sicut CV et RM simul ad suam differentiam, id est, sicut dupla EB ad duplam DC, vel EB ad DC, ita GH et HF simul ad suam differentiam quae est dupla YH, sive ita FY ad HY. Ergo quum OY sit quadrupla FY, erit etiam ut quadrupla EB ad DC, ita OY ad HY, et ita CE ad ET vel HZ; quod erat primum.

Et quia triangula ECD, HZI, sunt similia, est quoque ut CE ad HZ, id est, ut quadrupla EB ad DC, ita DC ad IZ; quod erat secundum.

Porrò quum Y sit centr. grav. cylindri QV, est BY dimidia BE; sed et KH dimidia est KT; ergo differentia duarum, BY, et KH, quae est YI, dimidia est differentiae duarum EB, et TK, quae est TL. TL autem aequalis est ZI, ergo IY dimidia quoque est ipsius ZI; quod erat tertium.

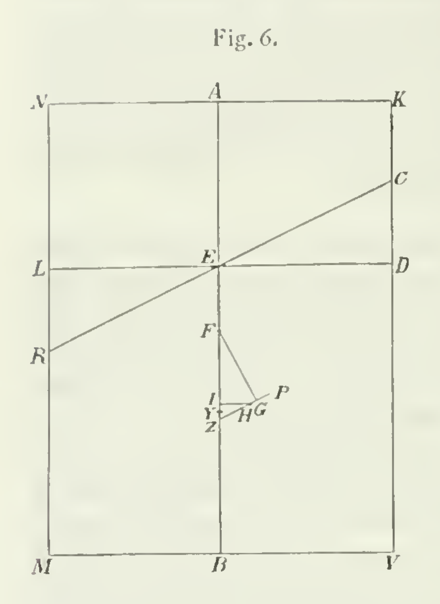
---

[9]) Comparez ce „Lemma" au „Lemma 1" du „Liber 2" (p. 124). Ces „Lemmata" dont le dernier nommé se rapporte aux parallélipipèdes et le premier aux cylindres ne diffèrent que numériquement. Il en est de même des „Theoremata 5 et 6", qui suivent, et qui correspondent aux „Lemmata 2 et 3" du „Liber 2".

THEOREMA 5. [10])

Sit Cylindrus KM, à quo absciſſus ſit plano DL baſi MV parallelo, cylindrus DM; et huic aequalis portio RCVM plano obliquo cujus maxima diameter RC, quam manifeſtum eſt tranſire debere per E centrum plani LD. Sit ergo AEB axis cylindri KM, ejusque centr. grav. F. Porrò ſit H centr. grav. portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, in eamque cadat perpendicularis FG. dico in lineâ ZP, partem ZG interceptam ab axe AB et perpendiculari FG, majorem, aequalem vel minorem fore parte ZH, interceptâ ab eodem axe AB et H, centro grav. portionis RCVM; prout duplum rectangulum AEB cum defectu dimidii quadrati DC, majus aequale vel minus erit quartae parti quadrati à diametro baſis MV vel NK, id eſt quadrato AK.

Fig. 6.



Sit enim Y centr. grav. cylindri DM, et cadat HI perpendicularis in axem AB.

Primò autem ponatur duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus eſſe quadrato AK: dico ZG majorem eſſe quàm ZH.

Quum enim quadrupla EB ſit ad DC, ut DC ad IZ[a] [11]), erit rectangulum ſub quadruplâ EB et IZ aequale quadrato DC; et rectangulum ſub quadruplâ EB et $\frac{1}{2}$ IZ quae eſt YZ[b] [12]), aequale dimidio quadrato DC.

Porrò quum AB ſit dupla FB, et EB dupla YB, erit AE quoque dupla FY; ergo rectang. AEB duplum rectanguli ſub EB et FY; quare duplum rectang. AEB erit quadruplum rectang[i]. ſub EB et FY. Ergo duplum rectanguli AEB aequale eſt rectangulo ſub quadrupla EB et FY. sed et $\frac{1}{2}$ quadrati DC aequale oſtenſum fuit rectangulo sub quadruplâ EB et YZ; ergo rectang. sub quadruplâ EB et totâ FZ, aequale eſt duplo rectangulo AEB unà cum $\frac{1}{2}$ quadr. DC. Quum

[10]) Comparez le „Lemma 2” de la page 125. On a ici en notation moderne: $ZG \gtreqless ZH$ selon qu'on a $2\,AE \times EB - \frac{1}{2}\,DC^2 \gtreqless AK^2$.

[11]) „*a* lemm. praeced.” [Huygens].

[12]) „*b* lemm. praeced.” [Huygens].

autem ponatur duplum quadr. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus esse quadrato AK vel ED, erit, addito utrinque integro quadrato DC, duplam rectanguli AEB unà cum $\frac{1}{2}$ quadr. DC, majus quadrato EC: Ergo et rectang. sub quadruplâ EB et FZ, majus erit quadrato EC. Igitur quadrupla EB ad EC majorem habet rationem, quàm EC ad FZ; atqui ut quadrupla EB ad EC, ita rectang. sub quadruplâ EB et DC est ad rectang. sub EC et DC, propter communem altitudinem DC; ergo et rectang. sub quadruplâ EB et DC ad rectang. sub EC et DC majorem habet rationem quam EC ad FZ. sed rectang. sub EC et DC, (quia quadrupla EB est ad DC, ut EC ad HZ[c] [13])) aequale est rectangulo sub quadrupla EB et HZ; Igitur quoque rectangulum sub quadruplâ EB et DC ad rectang. sub quadruplâ EB et HZ, sive basis DC ad HZ majorem habet rationem quam EC ad FZ, et permutando DC ad EC majorem, quàm HZ ad FZ[d] [14]). Sed propter triangula similia EDC, ZFG est sicut DÇ ad EC, ita GZ ad FZ; igitur GZ ad FZ majorem quoque habet rationem, quam HZ ad FZ: quare GZ major quàm HZ; quod erat demonstrandum.

Iam si duplum rectang. AEB cum defectu dimidii quadrati DC aequale sit quadrato AK; dico tum quoque ZH, ZG aequales fore; cujus demonstratio dependet à praecedenti. nam si duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale sit quadrato AK vel ED, omnia quae modo major erant hìc erunt aequalia, quare et tandem GZ aequalis HZ.

Similiter si duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus sit quadrato AK, omnia quae in praecedenti demonstratione erant majora, hìc erunt minora, et tandem GZ minor HZ, ut oportebat. Quare constat propositum.

Manifestum autem est etiam tum constare, quum punctum R incidit in angulum M, ita ut loco portionis, abscindatur plano RC cuneus cylindricus, de quo casu est praeterea Theor. sequens.

---

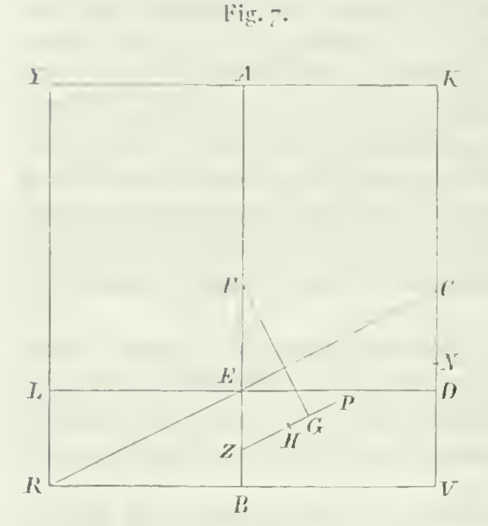
[13]) „*c* lemma praeced." [Huygens].

[14]) „*d* prop. 27. lib. 5. Eucl." [Huygens].

Theorema 6. [15])

Sit Cylindrus KR à quo abscissus sit Cuneus RCV, plano cujus maxima diameter RC. agatur autem per H centrum grav. Cunei RCV, linea ZHP parallela RC: et in eam cadat ex F centro gravitatis cijlindri, perpendicularis FG. Denique VD sit dimidia ipsius VC, et VN $\frac{5}{8}$ VC.

Fig. 7.



Dico in lineâ ZP, partem ZG, interceptam ab axe cylindri, AB, et perpendiculari FG, majorem aequalem vel minorem fore parte ZH, interceptâ ab eodem axe AB et H centro grav. cunei RCV; prout rectang. sub KN et DV, majus, aequale vel minus erit octavâ parte quadrati à diametro basis RV vel YK.

Sit enim planum DL parallelum basi RV, eritque intersectio diametrorum RC et DL in axe AB in E, et cylindrus DR cuneo RCV aequalis, quia VD est dimidia ipsius VC.

Primò autem ponatur rectangulum sub KN et DV majus esse octavâ parte quadrati RV; dico partem ZG majorem fore parte ZH.

Quum enim rectang. sub KN et VD majus sit quam $\frac{1}{8}$ quadr. RV, idem autem rectangulum aequale sit excessui, quo rectang. sub KV, VD, superat rectang. sub NV, VD seu $\frac{5}{4}$ quadrati VD; sequitur rectang. sub KV, VD cum defectu $\frac{5}{4}$ quadrati VD majus esse quam $\frac{1}{8}$ qu^{i}. RV. Sed rectang. sub KV, VD, aequale est rectangulo KDV unà cum quadrato VD; ergo rectang. sub KV, VD cum defectu $\frac{5}{4}$ quadrati VD aequale est rectangulo KDV cum defectu $\frac{1}{4}$ quadrati VD. Ergo quoque rectangulum KDV cum defectu $\frac{1}{4}$ qu. VD majus est quàm $\frac{1}{8}$ quadr. RV; et duplicando, erit duplum rectang. KDV sive AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. VD sive DC, majus quam $\frac{1}{4}$ quadr. RV vel YK, id est, majus quàm quadr. AK. Quare pars ZG major erit parte ZH[a] [16]); quod erat demonstrandum.

---

[15]) Comparez le „Lemma 3" de la page 127. Ici la condition s'exprime, en notation moderne $ZG \gtreqless ZH$ selon qu'on a $(KV - \frac{5}{4} DV)\, DV \gtreqless \frac{1}{2} AK^2$.

[16]) „*a* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

Quòd si rectang. sub KN, DV, aequale sit octavae parti quadrati RV, dico tum quoque ZG aequalem fore ZH. Omnia enim quae modo majora fuerunt hic erunt aequalia, quare et tandem duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{8}$ quadr. DV, aequale quadrato AK. ideoque ZG aequalis ZH[b 17]), ut oportebat.

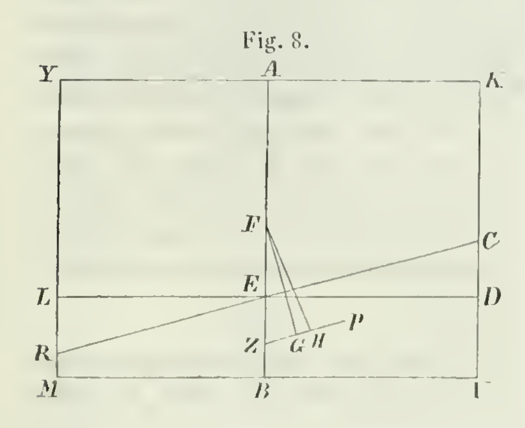
Eâdem ratione si rectang. sub KN, DV minus sit octavâ parte quadrati RV, erit quoque ZG minor quàm ZH. Quare constat propositum.

Theorema 7 [18]).

Cylindrus, cujus quadratum diametri basis non minus est quam duplum quadrati lateris, quamcunque proportionem ad liquidum habeat in gravitate, liquido supernatans demersâ basi rectus consistet; et si fuerit inclinatus, ita ut neutra tamen basium contingat liquidi superficiem, rectus restituetur.

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum diametri basis MV, non minus sit quam duplum quadrati lateris KV. Habeat verò ad liquidum in gravitate rationem quamcunque, eique supernatet demersâ base MV, et positus sit inclinatus ita ut liquidi superficies sit RC; (ponendo nempe eam esse proportionem Cylindri ad liquidum in gravitate quae est portionis RCVM ad totum,) dico Cylindrum non manere inclinatum sed rectum restitui, id est ut bases ejus fiant liquidi superficiei parallelae.

Fig. 8.



Intelligatur enim Cylindrus secari plano YKVM, per axem AB et per RC maximam diametrum plani RC transeunte: ut et plano LD parallelo basi MV, et abscindente cylindrum DM aequalem portioni RCVM, unde intersectio diametrorum LD, RC erit in axe AB in E. Sit porrò F centrum grav. cylindri KM, et H portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, et in eam cadat perpendicularis FG; denique jungatur FH.

Quia igitur quadr. MV vel YK non est minus quàm duplum quadrati KV, erit

[17]) „*b* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

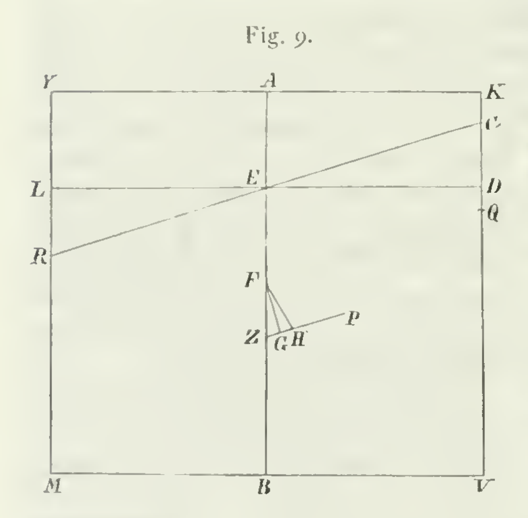
[18]) Ce théorème, avec celui qui suit, constituent la solution complète du problème de la stabilité de l'équilibre d'un cylindre droit qui flotte avec l'axe dans la situation verticale. Une telle solution, identique au fond avec celle de Huygens (voir la note 22), fut publiée dans les Comment. Acad. Petrop. de l'année 1738 (T. X, p. 162) par Daniel Bernoulli.

quadr. AK non minus quàm duplum quadrati AF; quum autem quadratum AF non ſit minus rectangulo AEB[a 19]), erit duplum quadrati AF non minus quam duplum rectang^l. AEB; quare et quadr. AK non minus duplo rectangulo AEB. Ergo duplum rectangulum AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK; ideoque ZG minor ZH[b 20]). Ergo quum FG ſit perpendicularis in ZP et conſequenter in liquidi ſuperficiem RC, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH. FH autem jungit centra gravitatis totius cylindri et partis merſae RCVM, ergo totus Cylindrus inclinabit in quam partem inclinat linea FH[c 21]), aſcendetque verſùs K, deprimetur verò verſùs Y, donec baſes MV et YK erunt liquidi ſuperficiei parallelae; quod erat demonſtr.

Theorema 8.

Cujuscunque Cylindri, (cujus quadratum à diametro baſis minus eſt quàm duplum quadrati lateris,) latere ita secto, ut rectangulum ſub partibus aequale ſit octavae parti quadrati à diametro baſis; ſi cylindrus ad liquidum in gravitate non minorem proportionem habeat quam majus ſegmentorum ad ipſum latus cylindri, vel non majorem quam ſegmentorum minus habet ad idem latus; ſupernatet autem liquido demerſâ baſe et ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, rectus reſtituetur [22]).

Fig. 9.



Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à baſe MV vel YK minus ſit quam

[19]) „*a* pr. 5. lib. 2. Eucl." [Huygens].

[20]) „*b* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

[21]) „*c* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

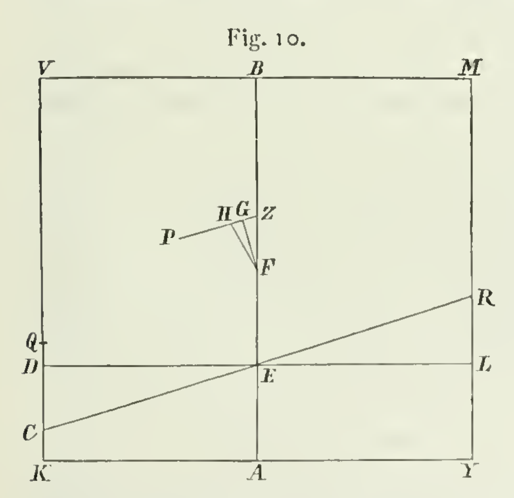
[22]) Soit h la hauteur du cylindre, d le diamètre de sa base, $\zeta = \frac{h}{d}$, ε la densité spécifique du cylindre relative à celle du liquide; alors le théorème nous apprend que, pour assurer la stabilité du cylindre, la valeur de ε doit être inférieure ou égale à la plus petite ou bien supérieure ou égale à la plus grande racine de l'équation $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$. Mais on peut exprimer les conditions de stabilité formulées dans ce théorème et dans celui qui le précède par la seule relation: $\zeta^2 \leqq \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$, qui est, sous d'autres notations, celle trouvée par Daniel Bernoulli.

duplum quadrati lateris KV. Sectum autem sit latus KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV. Et habeat primò Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem non minorem eâ, quam QV habet ad KV; et liquido supernatans positus sit inclinatus, ita ut liquidi superficies sit RC: dico rectum restitutum iri.

Abscindatur enim plano DL basi MV parallelo cijlindrus DM aequalis portioni mersae RCVM, et manifestum est diametrorum DL et RC intersectionem fore in cylindri axe AB, in E. Porrò sit F centrum gr. cylindri KM, et H portionis RCVM, per quod agatur ZHP parallela RC, et in eam cadat perpendicularis FG. denique jungatur FH.

Quia igitur cylindrus ad liquidum in gravitate habet rationem majorem quam QV ad KV, habebit quoque portio demersa RCVM sive qui eidem aequalis est cylindrus DM ad cylindrum KM non minorem rationem quam QV ad KV[a 23]; quare latus DV non minus est quam QV. Ergo rectangulum KDV sive AEB non majus rectangulo KQV. Ergo rectang. AEB non majus quoque octavâ parte quadrati MV, et duplum rectang. AEB non majus quartâ parte quadrati MV id est, quadrato AK. Quamobrem duplum rectang. AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. DC minus erit quadrato AK, atque ideo ZG minor ZH[b 24]. Ergo quum FG sit perpendicularis ad ZP, atque ideo ad liquidi superficiem RC, ad eandem non erit perpendicularis FH; quare cylindrus inclinabit in quam partem inclinat FH, ascendetque versùs K, deprimetur verò versùs Y, donec bases ejus sint liquidi superficiei parallelae; quod erat demonstr.

Fig. 10.



Habeat nunc [Fig. 10] Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem non majorem eâ, quam KQ habet ad KV, et liquido supernatans demersâ base positus, sit inclinatus, ita ut liquidi superficies sit CR; dico similiter rectum restitutum iri.

Sit enim H centr. gravitatis portionis enatantis MVCR, per quod agatur ZHP parallela RC, caeteraque construantur ut in casu praecedenti. Quum itaque Cylindrus MK ad liquidum in gravitate non majorem habeat rationem quam KQ ad KV, habebit quoque portio demersa RCKY, sive qui ei aequalis est

[23]) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].
[24]) „*b* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

cylindrus DY, ad cylindrum KM non majorem rationem quam KQ ad KV[a 23]), quare latus DK non majus erit quam KQ, ideoque DV non minor quam QV. Unde eodem modo quam in casu praecedenti hic quoque demonstrari potest FH non esse perpendicularem in ZP, ideoque nec in superficiem liquidi RC. FH autem hic jungit centra gravitatis, totius cylindri et portionis enatantis MVCR, ergo totus cylindrus inclinabit ad quam partem inclinat FH[b 25]), descendetque versus V ascendet verò versus M, donec bases ejus sint liquidi superficiei parallelae, quod erat demonstr.

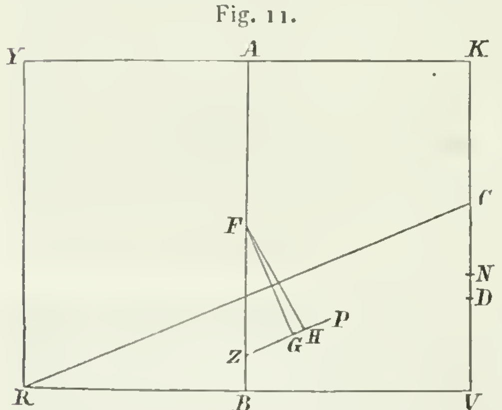
Ex hoc Theoremate manifestum est Cylindrum cujusvis longitudinis tam magnam vel tam parvam proportionem posse habere ad liquidum in gravitate, ut ei supernatans demersâ base et positus inclinatus, ita tamen ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectus restituatur, et bases fiant liquidi superficiei parallelae.

Theorema 9.

Cylindrus cujus quadratum à diametro basis ad quadratum lateris minorem quidem rationem habet quàm duplam, majorem verò quàm octo ad quinque; quamcunque ad liquidum in gravitate habeat proportionem, eidem supernatans demersâ base, nunquam ita consistet ut alterutra basium liquidi superficiem in uno puncto contingat[26]).

Sit Cylindrus KR, cujus quadratum à diametro basis RV vel YK ad quadratum lateris KV rationem habeat minorem quàm duplam, majorem verò quàm 8 ad 5. Habebit autem ad liquidum in gravitate proportionem, quae vel minor vel major erit subduplâ: Quare habeat primò minorem subduplâ, et liquido supernatans demersâ base inclinetur, ita ut angulus R sit in liquidi superficie quae sit RC; dico angulum R infra eandem superficiem demersum iri.

Fig. 11.



Sit enim AB axis Cylindri et F ejusdem centrum gravitatis. Sicut et H centrum gravitatis cunei demersi RCV, per quod agatur ZHP parallela RC; atque in eam cadat perpendicularis FG,

[25]) „*b* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

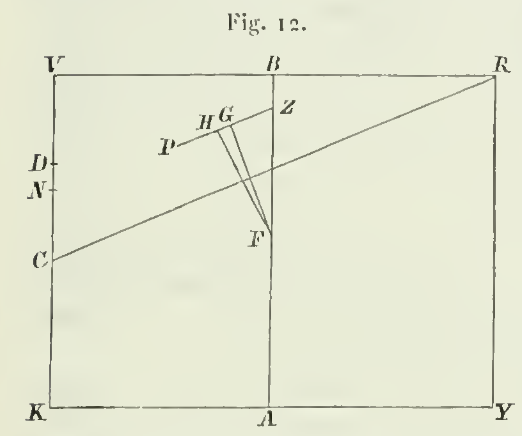
[26]) Comme dans le „Lib. 2" le „Theorema 4" servit à préparer le „Theorema 5", celui-ci prépare le „Theorema 10". Comparez le dernier alinéa de la note 28 du „Liber 2" (p. 132).

et jungatur FH. Porrò ut CV ſecta in D et N, ita ut VD quidem ſit dimidia CV, VN verò $\frac{5}{8}$ CV ſive $\frac{5}{4}$ DV.

Rectangulum KNV non poteſt majus eſſe quàm $\frac{1}{4}$ quadrati KV[a 27]); rectangulum autem ſub KN et DV facit $\frac{4}{5}$ rectanguli KNV, (quia NV eſt $\frac{5}{4}$ DV,) ergo rectangulum ſub KN et DV non eſt majus quàm $\frac{4}{20}$ ſive $\frac{1}{5}$ quadrati KV. Porrò quia quadr. RV ad quadr. KV majorem habet rationem quàm 8 ad 5 erit $\frac{1}{8}$ quadrati RV major quam $\frac{1}{5}$ quadrati KV: Ergo etiam $\frac{1}{8}$ quadrati RV major rectangulo ſub KN et DV, quare in lineâ ZP erit pars ZH major parte ZG[b 28]): Et quum FG ſit perpendicularis ad ZP et ad liquidi ſuperficiem RC, ad eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. totius cylindri et partis mersae RCV; quamobrem Cylindrus inclinabit in quam partem inclinat linea FH, et deprimetur verſùs Y, ideoque mergetur angulus R; quod erat demonſtrandum.

Habeat jam Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem ſubduplâ, et liquido ſupernatans demerſâ baſe inclinetur donec angulus R [Fig. 12] ſit in liquidi ſuperficie, quae ſit CR: dico angulum R ſupra liquidi ſuperficiem ſublatum iri.

Fig. 12.



Sit enim H centrum gravit. cunei enatantis CVR, et reliqua conſtruantur ut ſupra.

Demonſtrari igitur poteſt ſicut in caſu praecedenti, FH non eſſe perpendicularem ad PZ neque ad liquidi ſuperficiem CR. FH autem hic jungit centra gravitatis totius cylindri et partis enatantis CVR; ergo Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH, et deprimetur quidem verſùs V, extolletur verò verſùs R, ideoque angulus R ſupra liquidi ſuperficiem exſurget; quod erat demonſtr.

---

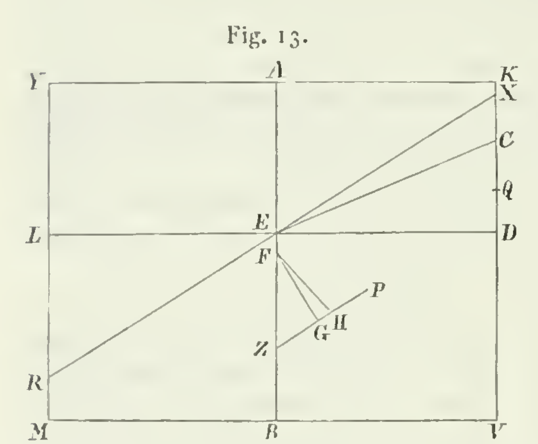
27) „*a* pr. 5. lib. 2. Eucl." [Huygens].
28) „*b* Theorem. 6. h. lib." [Huygens].

Theorema 10.

Cylindrus, cujus quadratum à diametro basis ad quadratum lateris minorem rationem habet quàm duplam, majorem verò quàm octo ad 5; si, diviso latere ut in Theor. 8°, ad liquidum in gravitate proportionem habeat minorem quàm segmentorum majus, majorem verò quam segmentorum minus habet ad idem latus: liquido supernatans demersâ base et positus inclinatus, ita ut neutra basium liquidi superficiem contingat, neque rectus restituetur, neque inclinatus consistet, nisi quando axis cum superficie liquidi faciet angulum aequalem angulo de quo dicetur. [29])

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à diametro basis MV ad quadratum lateris KV minorem rationem habeat quam duplam, sive quam 8 ad 4, majorem verò quàm 8 ad 5; et diviso latere KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV, habeat cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, ita ut DV minor quidem sit segmento QV, major verò QK. ductâ autem DL parallelâ MV, veniat ex E ubi DL ab axe AB secatur, linea EC, ita ut quadratum partis comprehensae CD duplum sit excessus quo duplum rectanguli AEB superat quadratum AK. [30])

Fig. 13.



Dico cylindrum KM, si liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, neque rectum restitutum iri, neque mansurum inclinatum nisi cùm axis cum liquidi superficie faciet angulum aequalem angulo ECD vel AEC.

Primò enim inclinetur Cylindrus ut liquidi superficies sit RX, quâcum axis AB faciat angulum minorem angulo AEC. Sit autem F centr. gr. Cylindri, et H por-

[29]) Le théorème démontre que, entre les limites $\sqrt{\frac{1}{2}} < \zeta < \sqrt{\frac{5}{8}}$ ($\zeta = h : d$, h hauteur, d diamètre du cylindre) le cylindre flottant pourra prendre la position ② de la page 87 de l'Avertissement, où l'axe du cylindre est supposé parallèle aux côtés AB, CD, toutes les fois qu'on aura $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$; c'est-à-dire, que la position ① est une position instable.

[30]) C'est la définition de l'angle AEC que l'axe du cylindre flottant fera avec le niveau du liquide dans la position d'équilibre. On en déduit facilement: $\cot^2 AEC = 16\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 - 2$.

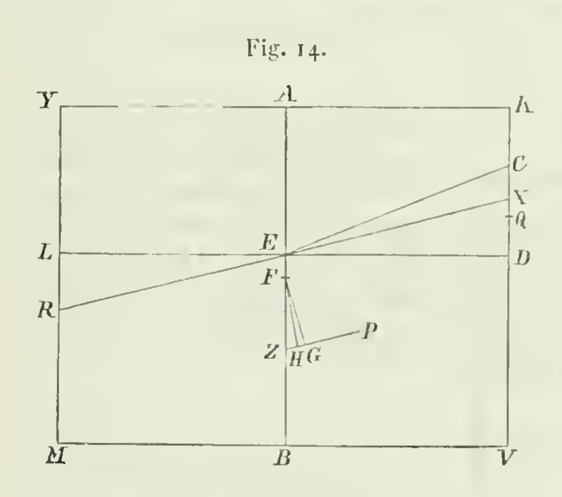
tionis RXVM, per quod ducatur ZHP parallela RX, atque in eam cadat perpendicularis FG, et denique jungatur FH.

Quia igitur Cylindrus eſt ad liquidum in gravitate ut DV ad KV, ſive ut cylindrus DL ad cylindrum KM, atque etiam ut pars merſa ad eundem cylindrum KM[a 31]), erit portio merſa RXVM aequalis cylindro DM; quare diametri RX et LD in eodem punčto E ſecabunt axem AB. Erit itaque ex hypotheſi angulus AEX minor angulo AEC, et XD major CD. Quum autem quadratum DC per conſtr. ſit duplum exceſſus quo duplum rečtanguli AEB ſuperat quadratum AK, erit duplum rečtanguli AEB cum defečtu $\frac{1}{2}$ quadr. CD aequale quadrato AK; et quum XD ſit major CD, erit duplum rečtanguli AEB cum defečtu $\frac{1}{2}$ quadr. XD, minus quadrato AK; ergo ZG minor quam ZH[b 32]), et quum FG ſit perpendicularis in ZP, et in liquidi ſuperficiem RX, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri totius et portionis merſae RXVM; quare Cylindrus inclinabit quò inclinat FH[c 33]), idque fiet quàm diu ſuperficies liquidi non convenit cum lineâ EC.

Jam ita diſponatur Cylindrus ut liquidi ſuperficies RX [Fig. 14] cum axe AB faciat angulum majorem angulo ECD vel AEC. Sit autem conſtručtio reliqua ut in caſu praecedenti.

Sicut ſupra ita hìc quoque diametri planorum, LD et RX in eodem punčto E ſecant axem AB; ergo hìc ex hijpotheſi angulus AEX major angulo AEC, et XD minor CD. Quum autem quadratum CD aequale ſit duplo exceſſui quo duplum rečtang. AEB ſuperat quadratum AK[d 34]), erit duplum rečtanguli AEB cum defečtu $\frac{1}{2}$ quadr. DC aequale quadrato AK; et quum XD ſit minor quam CD, erit duplum rečtang. AEB cum defečtu $\frac{1}{2}$ quadr. XD majus quadrato AK: Ergo ZG major quàm ZH[e 35]); et quum FG ſit perpendicularis ad ZP et ad liquidi ſuperficiem RX, ad

Fig. 14.



[31]) „*a* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

[32]) „*b* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

[33]) „*c* Theor. 1. lib. 2" [Huygens].

[34]) „*d* per constr." [Huygens].

[35]) „*e* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

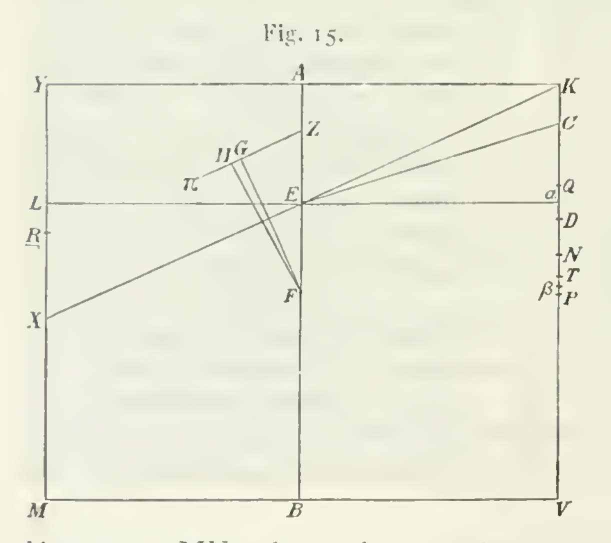
eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. totius Cylindri et portionis merſae RXVM: quare Cylindrus inclinabit quò inclinat FH, et deprimetur à parte K, idque donec ſuperficies liquidi conveniat cum lineâ EC.

Non conſiſtet igitur Cylindrus niſi cùm axis AB cum liquidi ſuperficie faciet angulum aequalem angulo AEC vel ECD; quod erat demonſtr.

Theorema II.

Cylindrus, cujus quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris rationem habet minorem quàm octo ad quinque, majorem verò quàm ſesquialteram, liquido ſupernatans demerſâ baſe, Aliquando rectus conſiſtet; Saepe inclinatus, ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat; aliquando inclinabitur donec alterutra baſium liquidi ſuperficiem in uno puncto contingat, idque quatuor caſibus; aliquando denique ulteriùs adhuc inclinabitur; Secundùm diverſam proportionem quam ad liquidum habebit in gravitate. [36])

Fig. 15.



Concluſio 1.

Quòd propoſitus Cylindrus aliquando rectus conſiſtat, et quae tum debeat ejus eſſe proportio ad liquidum in gravitate, manifeſtum eſt ex Theoremate 8°. h. lib. Illud enim ad omnes Cylindros pertinet, qui inclinare poſſunt.

2.

Sit itaque Cylindrus KM cujus quadratum à baſis diametro MV ad quadratum lateris KV rationem habeat mino-

[36]) Le théorème nous fait connaître que, quand on a $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$, alors les positions (1) et (2) de la page 87 de l'Avertissement (AB parallèle à l'axe du cylindre) peuvent se présenter,

rem quam 8 ad 5, majorem verò quam 3 ad 2. Et latere KV diviſo primùm biſariam in P, ſecundò in Q, ita ut rectangulum KQV aequale ſit $\frac{1}{8}$ quadrati MV, deinde in N, ita ut rectangulum KNV aequale ſit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, factiſque KD $\frac{4}{5}$ KN, et KT $\frac{4}{5}$ NV; ſumatur punctum ubivis inter Q et D ut α, et aliud infra T, non autem ultra P, ut β. Habeat autem Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem quam αV, vel βV, vel αK, vel βK, ad latus KV; et liquido ſupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat: dico neque rectum reſtitutum iri; neque inclinatum manſurum; niſi cùm axis cum ſuperficie liquidi angulum faciet aequalem angulo inveniendo ut ſupra Theor. 10°. [37]).

Ut autem appareat omnes hos caſus locum habere poſſe, et eſſe differentes, duo ſunt oſtendenda; primum, quòd punctum T cadat intra K et P: alterum, quòd puncta D et T non coincidant, quorum illud ſic oſtenditur.

Quia rectangulum KNV eſt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, quadratum verò MV majus quam $\frac{3}{2}$ quadrati KV ex conſtr. et hijpothesi: erit rectang. KNV majus quam $\frac{15}{64}$ quadrati KV. Unde ſequitur latus KV ita ſectum eſſe in N, ut ſegmentorum minus, KN, majus ſit quàm $\frac{3}{8}$ KV, ſegmentorum verò majus, NV, minus ſit quam

---

mais qu' il se peut aussi que ni l'une ni l'autre de ses positions ne soit une position d'équilibre stable. Tout cela selon les différentes valeurs de la densité relative ε. Voir, pour les détails, les „Conclusiones."

[37]) La „Conclusio" nous apprend que, entre les limites pour la valeur de ζ indiquées dans la note précédente, la position (2) pourra se présenter toutes les fois que les trois conditions suivantes soient remplies: 1° que la valeur de ε se trouve comprise entre les racines de l'équation quadratique: $8\varepsilon(1-\varepsilon)\zeta^2 = 1$, 2° qu'elle soit inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande des racines de l'équation $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ et de même 3° inférieure à la plus petite ou supérieure à la plus grande racine de l'équation: $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$.

La première de ces équations se rapporte au point Q de la figure du texte. Pour montrer comment la seconde et la troisième dépendent des points D ou T de cette figure, posons $VD = \varepsilon h$, alors $KD = (1-\varepsilon)h$, $KN = \frac{5}{4}(1-\varepsilon)h$, $NV = \frac{1}{4}(5\varepsilon-1)h$; $KN \times NV = \frac{5}{16}(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)h^2 = \frac{5}{32}d^2$, donc $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$, où, pour obtenir le point D, on doit prendre la plus grande des racines. Il s'ensuit donc que pour $\varepsilon = \frac{\alpha V}{KV}$ la valeur de ε sera plus grande encore que cette plus grande racine.

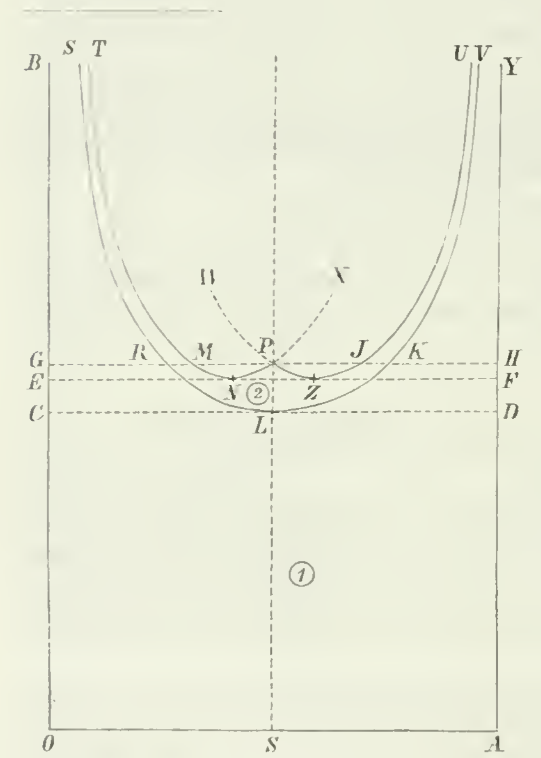
Posons ensuite $KD = \varepsilon h$, alors on arrivera à l'équation $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$, dont la moindre racine servira pour la valeur de KD. Ainsi si l'on a $\varepsilon = \frac{\alpha K}{KV}$, la densité relative ε sera inférieure à cette plus petite racine.

Le point T amènera les mêmes équations. En posant en premier lieu $TV = \varepsilon h$, et ensuite

$\frac{5}{8}$ KV [38]). Ergo KT, quae eſt $\frac{4}{5}$ NV, minor eſt quam $\frac{4}{8}$ ſive $\frac{1}{2}$ KV. Apparet itaque punctum T cadere intra K et P.

Alterum ſic oſtenditur, nimirum quòd puncta D et T non coincidant. quia enim rectangulum KNV eſt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, quadratum verò MV minus quam $\frac{8}{5}$ quadrati KV (utramque ex conſtr.): erit rectangulum KNV minus quam $\frac{8}{32}$ ſeu $\frac{1}{4}$ quadrati KV, unde ſequitur latus KV non bifariam dividi in N; ſegmentorum verò majus eſt NV, minus autem NK, ergo KD, quae eſt $\frac{4}{5}$ KN, minor eſt ipſâ KT, quae eſt $\frac{4}{5}$ NV. non igitur coincidunt puncta D et T.

Primùm itaque habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem quam αV ad KV; et facto plano αL parallelo baſi YK, veniat ex centro ejus E linea EC,



TK $= \varepsilon h$, on trouvera TV égal à KV multiplié par la plus petite des racines de l'équation $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ et TK égal à KV multiplié par la plus grande racine de l'équation $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$.

Ajoutons que la „Conclusio" pourrait s'exprimer encore comme il suit: que dans les limites indiquées de ζ la position (2) pourra être réalisée toutes les fois qu'on aura $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$ et simultanément $\zeta^2 < \frac{1}{2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)}$ et de même $\zeta^2 < \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$.

Enfin, pour expliquer la raison d'être des limites $\sqrt{\frac{5}{8}}$ et $\sqrt{\frac{2}{3}}$, nous donnons une représentation graphique du plan (ε, ζ) où les trois courbes, dont les équations ont été mentionnées, se trouvent tracées.

Dans cette représentation ou aura OE $= \sqrt{\frac{5}{8}}$; OG $= \sqrt{\frac{2}{3}}$; et la „Conclusio", ensemble avec le „Theoremato," exprime que la position (2) est possible toutes les fois que le point (ε, ζ) tombe dans l'espace RLKJZPNMR.

[83]) Toujours à cause de „pr. 5. lib. 2. Eucl.", puisqu' on aurait dans le cas contraire KN $\times$ NV $\overline{<}$ $\frac{15}{64}$ KV^2. Voici d'ailleurs cette „propositio" dont Huygens fait un usage si fréquent, telle qu'on la trouve dans l'édition de Clavius de 1607 (p. 176): „Si recta linea secetur in aequalia, & non aequalia: Rectangulus sub inaequalibus segmentis totius comprehensum, vna cum quadrato, quod ab intermedia sectionum, aequale est ei quod à dimidia describitur, quadrato." On en déduit aisément que le rectangle en question sera d'autant plus petit que les sections seront plus inégales, c'est-à-dire, que le point qui fait la division, se trouve plus éloigné du point milieu, et réciproquement. C'est sous cette forme que la proposition va être appliquée plusieurs fois par Huygens.

comprehendens partem Cα, cujus quadratum duplum ſit exceſſus, quo duplum rectang. AEB ſuperat quadr. AK. [38])

Ponatur autem cylindrus inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem. Oſtendendum eſt neque rectum reſtitui, neque inclinatum manere, niſi cùm axis AB faciet cum liquidi ſuperficie angulum aequalem angulo ECα vel AEC.

Abſcindatur à Cylindro Cuneus KXY plano cujus maxima diameter KX tranſeat per E interſectionem duarum αL et AB. Porrò ſit H centrum gravitatis cunei KXY, per quod agatur ZHπ parallela KX, in eamque cadat ex F centro grav. cylindri, perpendicularis FG, et jungatur FH: denique ſit YR $\frac{5}{4}$ YL.

Quoniam igitur rectangulum KQV per conſtr. aequale eſt $\frac{1}{8}$ quadrati MV, Cylindrus autem KM ad liquidum in gravitate proportionem habet quam αV ad KV, quae minor eſt eâ quam QV, major verò eâ quam QK habet ad KV, ſequitur Cylindrum non rectum reſtitutum iri [a] [39]). Sed neque eouſque inclinabitur ut baſis YK contingat liquidi ſuperficiem; nam ſi eouſque jam inclinatus ponatur et angulus K ſit in liquidi ſuperficie KX, continuò idem angulus ſupra liquidi ſuperficiem extolletur. quod ſic oſtenditur.

Quia enim cylindrus eſt ad liquidum in gravitate, ut αV ad KV, ſive ut cylindrus αM ad KM; erit etiam portio demerſa XKVM aequalis cylindro αM [b] [40]), quare liquidi ſuperficies KX, (id eſt, diameter plani quod eſt ſecundum liquidi ſuperficiem) in eodem puncto E ſecabit axem AB, ubi ſectus fuit à plano αL, eritque YL dimidia ipſius YX. YL autem ſive Kα minor eſt quàm KD, (quia punctum α ſumptum eſt inter Q et D,): ergo quoque YR, quae eſt $\frac{5}{4}$ YL, minor erit quàm KN, quae eſt $\frac{5}{4}$ KD. Ergo rectangulum YRM minus eſt rectangulo KNV; hoc aûtem aequale eſt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, ergo rectangulum YRM minus eſt quam $\frac{5}{32}$ quadrati MV; rectangulum autem ſub YL et RM eſt $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, (quia YL eſt $\frac{4}{5}$ YR,) ergo rectangulum ſub YL et RM minus eſt quàm $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV. Quare in lineâ Zπ erit pars ZG minor parte ZH [c] [41]). Ergo quum FG ſit perpendicularis in liquidi ſuperficiem XK, in eandem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri et cunei enatantis XYK. Quamobrem cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH [d] [42]), aſcendetque verſùs K, isque angulus ſupra liquidi ſuperficiem extolletur.

Demonſtratum igitur eſt Cylindrum neque rectum reſtitutum iri, neque tamen eousque inclinari poſſe ut alterutra baſium contingat liquidi ſuperficiem. Quòd autem angulus, quem, conſiſtente Cylindro, axis AB faciet cum liquidi ſuperficie,

---

39) „*a* per conv. Theor. 8. h. lib." [Huygens].

40) „*b* Theor. 4. lib. 1." [Huygens].

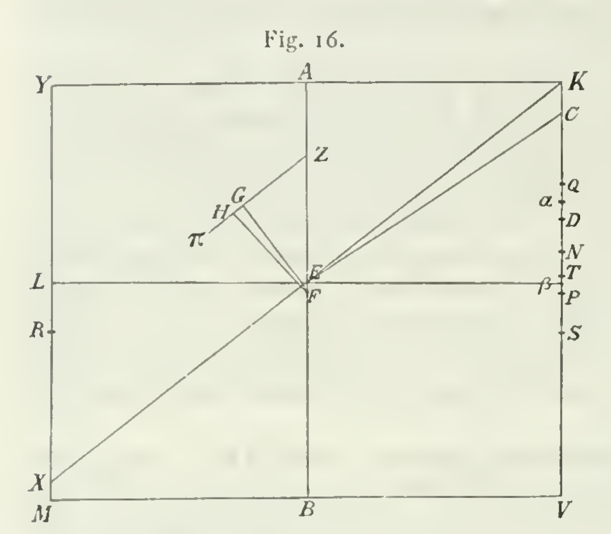
41) „*c* Theor. 6. h. lib." [Huygens].

42) „*d* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

aequalis futurus fit angulo ECα vel AEC, demonftrari poterit ficut in Theoremate 10° h. lib.

Habeat nunc [Fig. 16] Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam βV habet ad KV, et, facto plano βEL parallelo MV, inveniatur angulus ECβ ut in cafu praecedenti. Dico, fi Cijlindrus liquido fupernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra bafium contingat liquidi fuperficiem, quòd neque rectus reftituetur neque inclinatus manebit, nifi cùm axis AB faciet cum liquidi fuperficie angulum aequalem angulo AEC vel ECβ.

Fig. 16.



Conftruantur enim reliqua ut in cafu praecedenti; et praeterea fit KS aequale ipfi VN et YR $\frac{5}{4}$ YL.

Quia igitur Cylindrus ad liquidum in gravitate habet rationem quam βV ad KV, quae minor eft eâ quam QV, major autem eâ quam QK habet ad KV, non poterit quidem rectus reftitui [a 43]).

Sed neque eousque poterit inclinari, ut bafium alterutra contingat liquidi fuperficiem; nam fi jam eousque ponatur inclinatus, ut angulus K fit in liquidi fuperficie KX, ftatim idem angulus fupra fuperficiem liquidi extolletur. Primò enim facile ficùt in cafu praecedenti oftenditur YL effe dimidiam ipfius YX; fed YL five Kβ major eft quam KT, (quia punctum β fumptum fuit inter T et P): ergo YR quae eft $\frac{5}{4}$ YL major erit quam KS, vel NV quae fingulae funt $\frac{5}{4}$ KT; quare rectangulum YRM minus erit rectangulo KSV vel KNV; hoc autem aequale eft $\frac{5}{32}$ quadrati MV, ergo rectang. YRM minus eft quam $\frac{5}{32}$ quadrati MV; Rectangulum autem fub YL et RM eft $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, (quia YL eft $\frac{4}{5}$ YR) ergo rectang. fub YL et RM minus eft quam $\frac{4}{32}$ five $\frac{1}{8}$ quadrati MV. Ergo in lineâ Zπ, erit pars ZG minor parte ZH [b 44]), et quum FG fit perpendicularis in Zπ et in liquidi fuperficiem XK, in eandem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra grav. cylindri et cunei enatantis XYK. quamobrem Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH [c 45]), et angulus K afcendet fupra

43) „a per conv. Theor. 8. h. lib." [Huygens].

44) „b Theor. 6. h. lib." [Huygens].

45) „c Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

liquidi ſuperficiem. Quòd autem rurſus angulus quem manente cylindro axis AB faciet cum liquidi ſuperficie, aequalis futurus ſit angulo ECβ vel AEC, demonſtrari poterit ut in Theor. 7° [46]) hujus lib.

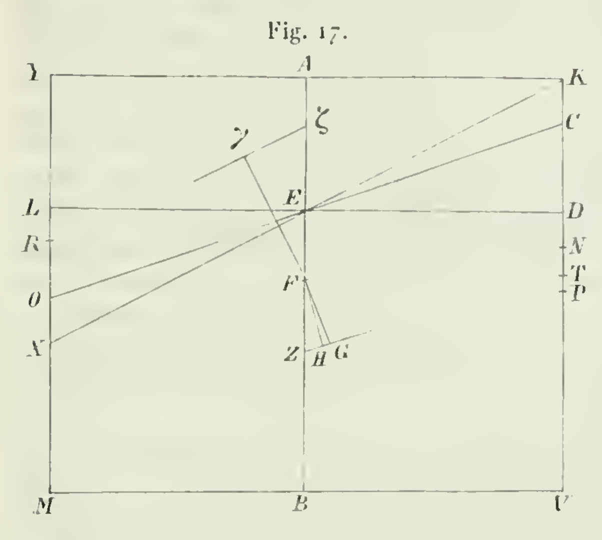
Quòd ſi Cylindrus ſit ad liquidum in gravitate ut αK vel βK ad KV, inverſa tum intelligantur duo praecedentia ſchemata, et eaedem quae in praecedentibus caſibus erunt demonſtrationes, niſi quòd tunc eae partes merſae erunt quae prius enatabant.

Si igitur Cylindrus ſit ad liquidum in gravitate ut αV vel βV vel αK vel βK ad latus KV, etc.; quod erat dem.

3.

diviſo latere KV, ut ſuprà, punctis P, N, D, T, nempe in P bifariam, et in N ita ut rectangulum KNV ſit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD ſit $\frac{4}{5}$ KN, KT verò $\frac{4}{5}$ VN; Si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam DV vel TV vel DK vel TK ad latus KV, et liquido ſupernatans ponatur inclinatus ita ut neutra baſium liquidi ſuperficiem contingat, eouſque inclinabitur donec alterutra baſium eandem ſuperficiem contingat in uno puncto. [47])

Fig. 17.



Habeat enim primò ad liquidum in gravitate rationem quam DV ad KV, et

---

[46]) Lisez 10°.

[47]) La „Conclusio" indique, que le cylindre flottant se trouve en équilibre dans une position intermédiaire entre la position (2) et l'une des positions (3) ou (3)′ de l'„Avertissement" (c'est-à-dire dans une position telle que l'une des bases circulaires touche le niveau du liquide) toutes les fois qu'entre les limites $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$, on aura $2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)\zeta^2 = 1$ (pour $\varepsilon > \frac{1}{2}$), ou bien $2\varepsilon(4-5\varepsilon)\zeta^2 = 1$ (pour $\varepsilon < \frac{1}{2}$). Inutile de dire qu'alors le point (ε, ζ) se trouvera sur l'une des lignes PZJ ou PNM de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

On remarquera d'ailleurs que la *stabilité* de la position en question n'est pas prouvée puisque, à cet effet, on doit savoir encore comment le cylindre se comportera, s'il est poussé de manière à atteindre une position (3) ou (3)′.

ponatur inclinatus, ita ut liquidi fuperficies fit OC. dico coufque inclinatum iri donec bafis YK liquidi fuperficiem contingat in puncto K.

Sit enim planum DL parallelum bafi KY, et planum KX abfcindat cuneum KYX aequalem cylindro KL: Porrò fit F centrum gravitatis cijlindri; item H centr. gravitatis portionis OCVM, et γ cunei XYK, per quae ducantur ZHG parallela OC et $\zeta\gamma$ parallela XK, in easque cadant perpendiculares FG et Fγ: Jungatur etiam FH, et denique fit YR aequalis KN.

Quia igitur rectangulum KNV five YRM funt $\frac{5}{32}$ quadrati MV, rectangulum autem fub YL et RM eft $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM (quia RY eft $\frac{5}{4}$ LY,): fequitur rectangulum fub YL et RM aequale effe $\frac{4}{32}$ five $\frac{1}{8}$ quadrati MV; quare erit in lineâ $\zeta\gamma$, pars $\zeta\gamma$, quae eft inter axem AB et perpendicularem Fγ aequalis parti quae eft inter eandem axem AB et centrum gravitatis cunei XYK [a 48]); et quià hae partes funt aequales, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadr. XL aequale quadrato AY [b 49]) vel AK nimirum quartae parti quadrati YK. Ergo duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati CD (quia CD minor eft quam KD vel XL) majus erit quadrato AK. Quàre in lineâ ZG erit pars ZG major parte ZH [c 50]), et quum FG fit perpendicularis in ZG; ideoque in liquidi fuperficiem OC, in eandem fuperficiem non erit perpendicularis FH, quae jungit centra gravitatis cylindri et partis merfae OCVM; quamobrem Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH [d 51]), defcendetque verfùs K, idque donec angulus K fit in ipfà liquidi fuperficie: Cum autem eò pervenerit tum manifeftum eft enatare debere cuneum KYX; nam quum in hujus centrum gravitatis incidat Fγ, quae fimul etiam perpendicularis eft in liquidi fuperficiem XK, (quod in principio hujus demonftrationis oftenfum fuit,) cylindrus tunc ad neutram partem magis inclinabit; quod erat demonftr.

Habeat jam [Fig. 18] Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam TV ad KV, et liquido fupernatans ponatur inclinatus ita ut fuperficies liquidi fit OC; dico cousque inclinatum iri donec bafis YK contingat liquidi fuperficiem in puncto K.

Sit enim planum TL parallelum bafi MV, et reliqua ad eum modum conftruantur quo in cafu praecedenti conftructa fuere, fiant verò KS, YR aequales ipfi NV, Eritque pene eadem demonftratio, quae fuit modò.

Nam quum rectangulum KNV five KSV five YRM fit $\frac{5}{32}$ quadrati MV, rectangulum autem fub YL et RM fit $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, (nam ficut KT eft $\frac{4}{5}$ NV five KS, ita etiam YL eft $\frac{4}{5}$ YR,) erit rectangulum fub YL et RM aequale $\frac{4}{32}$ five $\frac{1}{8}$ quadrati MV; unde fequitur perpendiculum Fγ incidere in ipfum centrum gravi-

48) „*a* Theor. 6. h. lib." [Huygens].

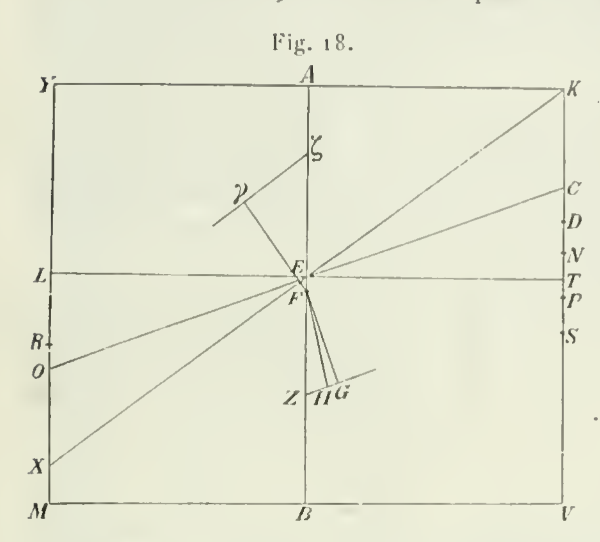
49) „*b* per conv. Theor. 5. h. lib." [Huygens].

50) „*c* Theor. 5. h. lib." [Huygens].

51) „*d* Theor. 1. lib 2." [Huygens].

tatis cunei KYX [a 52]). Hinc autem primò demonſtrari poteſt ut in caſu praecedenti, Cylindrum quidem non conſiſtere cùm liquidi ſuperficies eſt OC, ſed deſcendere verſùs K, donec angulus K ſit in ipſâ liquidi ſuperficie, atque ea ſit KX; ſecundò etiam hoc inde ſequitur, quòd cylindrus conſiſtat cùm liquidi ſuperficies eſt KX; quod erat demonſtrandum.

Fig. 18.



Denique ſi Cylindrus ſit ad liquidum in gravitate ut DK vel TK ad KV inverſa intelligantur duo praecedentia ſchemata (adeo ut Fγ tum fiat ea quae jungit centra gravitatis cylindri et partis demerſae) et eadem quae in praecedentibus caſibus erunt quoque demonſtrationes.

Si igitur Cylindrus ad liquidum in gravitate habeat rationem quam DV vel TV vel DK vel TK ad KV, &c. quod erat demonſtr.

4.

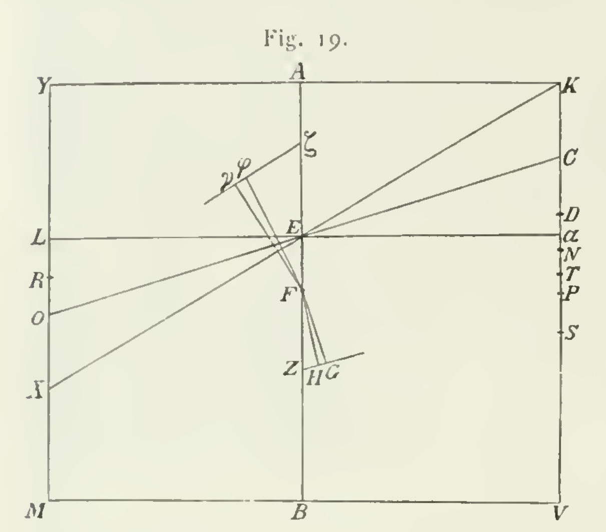
Secto rurſus latere KV [Fig. 19], ut ſupra, in punctis P, N, D, T, nempe in P bifariam, et in N ita ut rectangulum KNV aequetur $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD ſit $\frac{4}{5}$ KN, KT autem $\frac{4}{5}$ NV, ſumptóque puncto α ubivis inter D et T; Si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat quam αV vel αK habet ad KV, et liquido ſupernatans, demerſâ baſe, ponatur inclinatus, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; ulteriùs inclinabitur, quam ut alterutra baſium contingat eandem ſuperficiem in uno puncto. [53])

[52]) „a Theor. 6. h. lib." [Huygens].

[53]) La „Conclusio" nous apprend que dans le cas $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$, toutes les fois que la densité spécifique ε se trouvera située entre les deux racines de l'une ou de l'autre des équations mentionnées dans la note 47 (ce qui veut dire que le point (ε, ζ) se trouve dans l'une des divisions PZJP ou PNMP du tableau de la note 37, p. 176, et qu'on aura donc $\zeta^2 > \frac{1}{2(5\varepsilon-1)(1-\varepsilon)}$ ou $\zeta^2 > \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$), alors le cylindre ne pourra prendre ni la position (1), ni la position (2). Elle laisse indécis dans lesquelles des positions (3), (4) ou (5) (voir la figure p. 87 de l'Avertissement, où le côté AB est supposé parallèle à l'axe du cylindre) l'équilibre se fera.

Habeat primò cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam αV ad KV, et ponatur inclinatus ita ut liquidi ſuperficies ſit OC; dico ulteriùs inclinatum iri quàm ut baſis YK liquidi ſuperficiem contingat in puncto K.

Fig. 19.



Fiat enim planum αEL parallelum baſi KY vel MV, et planum KEX abſcindat à cylindro cuneum KYX aequalem cylindro KL.

Porrò ſit H centrum grav. portionis OCVM, et Φ centrum grav. cunei KYX, per quae agantur ZHG parallela OC, et ζΦγ parallela XK, in easque cadant ex F centro grav. cylindri, perpendiculares, FG ad ZG et Fγ ad ζγ: jungantur etiam FH et FΦ; et denique fiat KS aequalis NV, et YR $\frac{5}{4}$ YL.

Quia igitur Cylindrus eſt ad liquidum in gravitate ut αV ad KV, ſive ut cylindrus αM ad cylindrum KM, atque ita etiam portio merſa OCVM ad cylindrum KM[a 54]), ſequitur portionem OCVM aequalem eſſe cylindro αM, ac proinde diametros αL, OC et KX in eodem puncto E ſecare axem AB. Porrò quum Kα, cui aequalis eſt YL, major ſumpta ſit quam KD, minor verò quam KT, erit YR ſive $\frac{5}{4}$ YL major quam KN ſive $\frac{5}{4}$ KD, minor autem quàm KS, quae (ſicuti VN) eſt $\frac{5}{4}$ KT; Ergo quum puncta N et S aequaliter diſtent à P, ſive medio lateris KV, punctum R minus diſtabit à medio lateris YM, quàm N vel S diſtant à P: quamobrem rectangulum YRM majus erit rectangulo KNV ſive $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et rectangulum ſub YL et RM ſive $\frac{4}{5}$ rectanguli YRM, majus quam $\frac{4}{32}$ ſive $\frac{1}{8}$ quadrati MV: Ergo in lineâ ζγ erit intercapedo ζγ major ζΦ[b 55]); unde conſtat duplum rectanguli BEA cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati XL majus eſſe quadrato AY[c 56]): ergo quum OL vel Cα minor ſit quàm XL vel Kα, erit duplum rectanguli AEB cum defectu $\frac{1}{2}$ quadrati Cα multò majus quadrato AY vel AK, quare in lineâ ZG erit intercapedo ZG major ZH[d 57]). Ergo quum FG ſit perpendicularis ad ZG et ad liquidi ſuperficiem OC, ad eandem ſuperficiem non erit perpendicularis FH,

54) „a Theor. 4. lib. 1." [Huygens].
55) „b Theor. 6. h. lib." [Huygens].
56) „c per conv. Theor. 5. h. lib." [Huygens].
57) „d Theor. 5. h. lib." [Huygens].

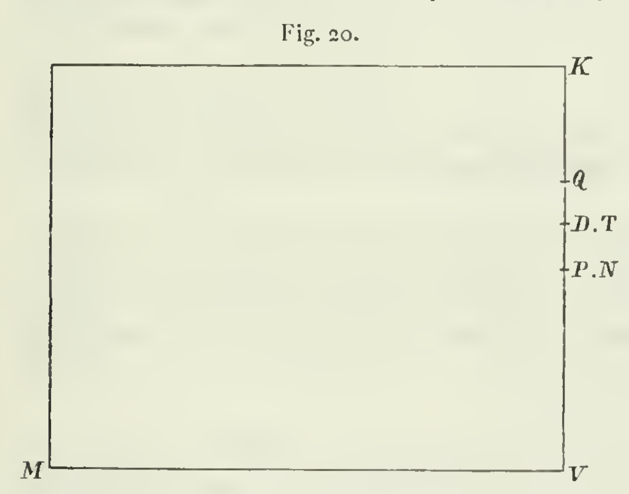
quae jungit centra gravitatis totius cylindri et portionis merſae OCVM; Ideoque Cylindrus inclinabit quò inclinat linea FH *e* [58]), deſcendetque à parte K donec angulus K ſit in liquidi ſuperficie atque ea ſit KX. Sed neque tum conſiſtet; nam quum jam fuerit oſtenſum in lineâ $\zeta\gamma$, intercapedinem $\zeta\gamma$ majorem eſſe quam $\zeta\phi$, et $F\gamma$ ſit perpendicularis in $\zeta\gamma$ et in liquidi ſuperficiem, quae tum erit KX, in eandem ſuperficiem non erit perpendicularis $F\phi$, quae jungit centra gravitatis totius cylindri et cunei enatantis KYX, ideoque Cylindrus inclinabit quò inclinat linea $F\phi$ *f* [59]), mergeturque angulus K; quod erat demonſtrandum.

Quod ſi Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem habeat quam αK ad KV, tum inverſa intelligatur praecedens figura, et demonſtratibur angulum K emerſurum eſſe ſupra liquidi ſuperficiem, neque differet demonstratio à praecedenti, niſi quod partes eae hìc merſae erunt quae prius enatabant.

Corollarium. 1.

Fuit hoc Theorema de Cylindro cujus quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris minorem habet rationem quam octo ad quinque, majorem verò quam ſeſquialteram [$\frac{3}{2}$]; verùm ſi ejuſmodi ſit Cylindrus ut quadratum à diametro baſis ad quadratum lateris ſit ut octo ad quinque; tum diviſo latere KV ut ſupra in P, Q et N, incidet quidem punctum N in P, id eſt, in medium lateris KV, [60]) et ideo puncta D et T diverſa non erunt, latuſque KV ita divident ut pars verſùs V ſit ſeſquialtera reliquae verſùs K. Unde fiet ut Cylindrus ſemper inclinatus conſiſtat, ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, praeterquam ſi ad liquidum in gravitate rationem habeat quam DV vel DK ad KV, id eſt, quam tria vel duo ad quinque tum enim alterutra

Fig. 20.



[58]) „*e* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

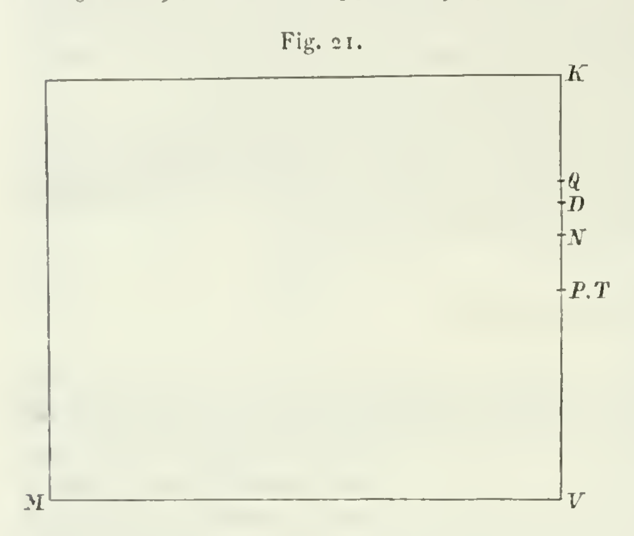
[59]) „*f* Theor. 1. lib. 2." [Huygens].

[60]) On a alors $KN \times NV = \frac{5}{32} MV^2 = \frac{5}{32} \times \frac{8}{5} KV^2 = \frac{1}{4} KV^2$; mais de même $KP \times PV = \frac{1}{4} KV^2$; donc, d'après „pr. 5. lib. 2. Eucl.", les points P et N doivent coïncider. Voir la note 38. p. 176.

baſium continget liquidi ſuperficiem in uno punćto: Vel ſi habeat rationem majorem quam QV vel minorem quam QK ad KV, tum enim rećtus conſiſtet. [61])

Quòd ſi Cylindrus talis ſit [Fig. 21] ut quadratum diametro baſis, quadrati lateris ſit ſesquialterum[62]); tum diviſo latere KV ut ſuprà in P, Q et N, erit KQ $\frac{1}{4}$KV[63]); NK $\frac{3}{8}$ KV[64]); et ideo DK $\frac{3}{10}$ KV[65]), punćtum verò T incidet in P, id eſt, medium lateris KV[66]). Unde fiet ut Cylindrus primò, rećtus quidem conſiſtat, ſi ad liquidum in gravitate rationem habuerit majorem quam QV, vel minorem quam QK ad KV id eſt majorem quam ſubſesquitertiam, vel minorem quam ſubquadr. [$\frac{1}{4}$] Secundo, inclinatus ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem, ſi rationem habuerit ad liquidum in gravitate minorem quàm QV, majorem verò quam DV ad KV; vel ſi minorem quam DK, majorem verò quàm QK ad KV. Tertiò, inclinatus ita ut altera baſium liquidi ſuperficiem contingat uno in punćto, ſi fuerit ad liquidum in gravitate ut DV vel DK ad KV, id eſt, ut 7 vel 3 ad 10.

Fig. 21.



Quartò autem ſi ad liquidum in gravitate rationem habeat minorem quàm DV, majorem verò quam DK ad KV, tum ulteriùs inclinabitur quàm ut altera baſium liquidi ſuperficiem in uno punćto contingat; Praeterquam, ſi eam habeat rationem quam PV ad KV, id eſt ſubduplam, tum enim ita conſiſtet ut utraque baſis liquidi ſuperficiem contingat in uno punćto. [67])

[61]) Cette première partie du „Corollarium" s'explique facilement à l'aide de la représentation graphique de la note 37, p. 176. Il s'agit du cas où le point (ε, ζ) se trouve sur la droite EF.

[62]) Le point (ε, ζ) se trouve alors sur la droite GH du tableau de la note 37, ce qui expliquera aisément tout ce qui va suivre.

[63]) On a (voir la „Conclusio 2") $KQ \times QV = \frac{1}{8} MV^2 = \frac{3}{16} KV^2$, relation qui est réalisée par $KQ = \frac{1}{4} KV$, $QV = \frac{3}{4} KV$.

[64]) On a ici $KN \times NV = \frac{5}{32} MV^2 = \frac{15}{64} KV^2$; relation satisfaite par $KN = \frac{3}{8} KV$; $NV = \frac{5}{8} KV$.

[65]) Puisqu'on a par définition $KD = \frac{4}{5} KN$. („Conclusio 2").

[66]) Puisqu'on a $KT = \frac{4}{5} NV$, donc $= \frac{1}{2} KV$.

[67]) C'est le cas où le point représentatif (ε, ζ) tombe en P. Alors les deux bases circulaires du cylindre touchent l'une et l'autre la surface du liquide.

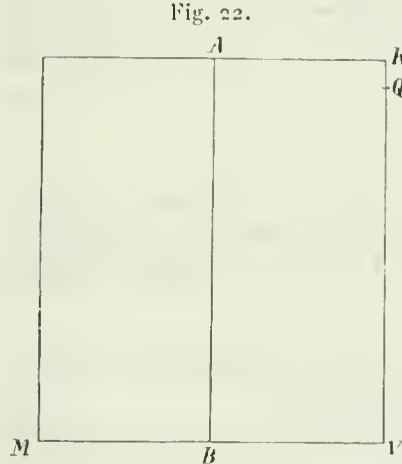
THEOREMA 12.

Cylindrus cujus quadratum à diametro basis, minus est quam sesquialterum [$\frac{3}{2}$] *quadrati lateris, liquido supernatans demersâ base, Aliquando rectus consistet, Aliquando inclinatus ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; Aliquando eousque inclinabitur, ut altera basium liquidi superficiem contingat in uno puncto idque duobus casibus; Ut plurimum denique ulterius adhuc inclinabit: Pro diversâ proportione quam ad liquidum habebit in gravitate.* [68])

Conclusio 1.

Sit Cylindrus KM, cujus quadratum à diametro basis MV, minus sit quàm sesquialterum quadrati lateris KV. Axis autem sit AB; Et diviso latere KV in Q, ita ut rectangulum KQV aequetur octavae parti quadrati MV, habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam QV habet ad KV, vel minorem quam QK ad KV; dico, si liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, rectum restitutum iri, ita ut axis AB sit ad liquidi superficiem perpendicularis.

Fig. 22.



Hoc enim Theoremate 8° h. lib. demonstratum est de omnibus Cylindris qui inclinari possunt quare et huic convenit.

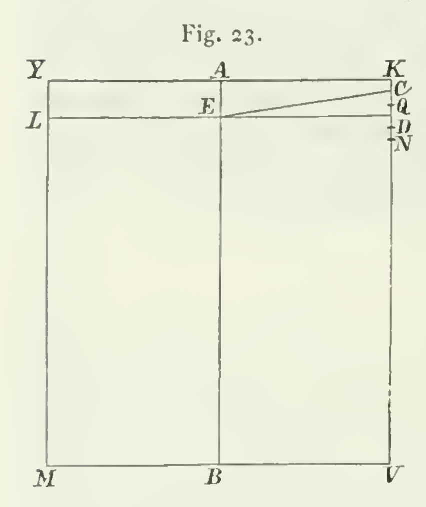
[68]) Le théorème nous apprend que pour $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$ les positions (1) et (2) p. 87 de l'Avertissement (AB parallèle à l'axe du cylindre) peuvent se réaliser entre certaines limites de la valeur de la densité ε. Pour d'autres valeurs de ε il arrive que ni l'une ni l'autre de ses positions ne soit une position d'équilibre stable.

Sous ces respects le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$ ne diffère pas du cas $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{2}{3}}$; mais il n'en est pas de même pour certains détails qu'on trouvera dans les „Conclusiones." Voir les notes 70, 71 et 72.

2.

Latere KV diviso ut suprà in Q, et praeterea punctis N et D, ita ut rectangulum quidem KNV aequetur $\frac{5}{32}$ quadrati MV, KD autem sit $\frac{4}{5}$ segmenti minoris NK; si habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem majorem quam DV, minorem verò quam QV habet ad KV; vel majorem quidem quam QK, minorem verò quam DK habet ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem; dico neque rectum restitutum iri, neque mansurum inclinatum, nisi cùm axis AB faciet cum liquidi superficie angulum aequalem angulo ECα[69]), seu AEC, invento ut in Theoremate 10° hujus libri.[70]).

Fig. 23.



demonstrari hoc potest eodem modo quo Conclusio 2ª Theorem. 11ⁱ h. lib. verum ut appareat casus hos quandoque locum habere posse, ostendendum est, punctum D magis distare à K quam punctum Q. Quoniam itaque rectangu-

[69]) La lettre α manque dans la figure achevée (voir la page 90 de l'Avertissement). Elle se trouve dans la figure du manuscrit au point d'intersection de LE et KV.

[70]) La „Conclusio" nous fait connaître que la position (2) de la page 87 de l'Avertissement pourra se réaliser, dans le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$, de deux manières: 1° toutes les fois que la densité est inférieure à la plus grande racine de l'équation $8\varepsilon(; -\varepsilon)\zeta^2 = 1$, mais supérieure à la plus grande racine de l'équation $2(5\varepsilon - 1)(1 - \varepsilon)\zeta^2 = 1$; 2° si la densité est supérieure à la plus petite racine de l'équation $8\varepsilon(1 - \varepsilon)\zeta^2 = 1$, mais inférieure à la plus petite de l'équation $2\varepsilon(4 - 5\varepsilon)\zeta^2$.

Formulée de cette façon elle diffère de la „Conclusio 2" du „Theorema 11"; mais la différence n'est pas essentielle, puisqu'on aurait pu exprimer les conditions de la réalisation de la position (2) pour toutes les valeurs possibles de ε, comme il suit: qu'on doit avoir $\zeta^2 > \frac{1}{8\varepsilon(1-\varepsilon)}$ et simultanément $\zeta^2 < \frac{1}{2(1-\varepsilon)(5\varepsilon-1)}$ et $< \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$.

Appliquée à la représentation graphique de la note 37, p. 176, la „Conclusio" nous apprend que la position (2) sera réalisable si le point (ε, ζ) se trouve dans les divisions UJKV ou SRMT; d'où il suit, en résumant tous les „Theoremata" et „Conclusiones" qui se rapportent à cette position (2), qu'elle se présentera toutes les fois que le point en question tombe à l'intérieur de la division SRLKVUJZPNMT.

lum KNV continet $\frac{5}{32}$ quadrati MV, et KD eſt $\frac{4}{5}$ KN, continebit rectangulum ſub KD et NV $\frac{4}{32}$ ſeu $\frac{1}{8}$ quadrati MV; rectangulo autem ſub KD et NV, majus eſt rectangulum KDV, ergo idem hoc majus quoque quàm $\frac{1}{8}$ quadrati MV, ſive rectangulo KQV; quare neceſſariò KD major quam KQ. Poteſt itaque Cylindrus ad liquidum in gravitate habere rationem majorem quàm DV, minorem verò quam QV habet ad KV: poteſt et conſequenter habere majorem quam KQ, minorem verò quam KD habet ad KV; quae erant oſtendenda.

3.

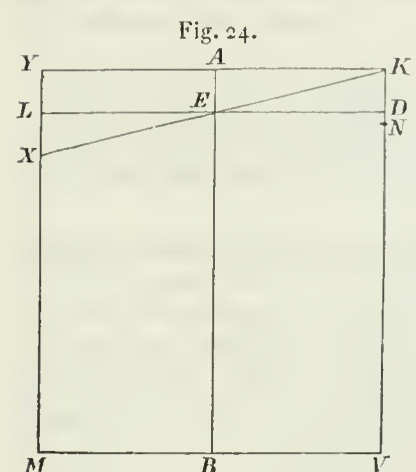


Fig. 24.

Latere KV diviso ut in Conclusione praecedenti punctis N et D, nempe ut rectangulum KNV contineat $\frac{5}{32}$ quadrati à diametro baſis MV, KD, autem ſit $\frac{4}{5}$ KN ſegmenti minoris; Si habeat Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem quam DV habet ad KV, vel quam DK ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus ita ut neutra baſium contingat liquidi ſuperficiem; dico eousque inclinatum iri ultrò, ut alterutra baſium liquidi ſuperficiem contingat in uno puncto.[71])

Hoc autem demonſtrari poſteſt eodem modo, quo Concl. 3ª Theorematis praecedentis 11ⁱ.

---

[71]) La „Conclusio" nous indique que, dans le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$, le cylindre sera en équilibre dans une position intermédiaire entre les positions ② et ③ ou ③′ toutes les fois que la densité ε égale la plus grande racine de l'équation $2(5\varepsilon - 1)(1 - \varepsilon)\zeta^2 = 1$, ou la plus petite de l'équation $2\varepsilon(4 - 5\varepsilon)\zeta^2 = 0$; c'est-à-dire quand le point (ε, ζ) se trouve sur l'une des courbes JU ou MT de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

Elle ne diffère donc de la „Corclusio 3" du „Theorema 11" p. 179, qui se rapporte au cas $\sqrt{\frac{5}{8}} < \zeta < \sqrt{\frac{3}{2}}$, que par ce qu'elle exclut les cas où ε égale la plus petite racine de la première ou la plus grande de la seconde de ces équations.

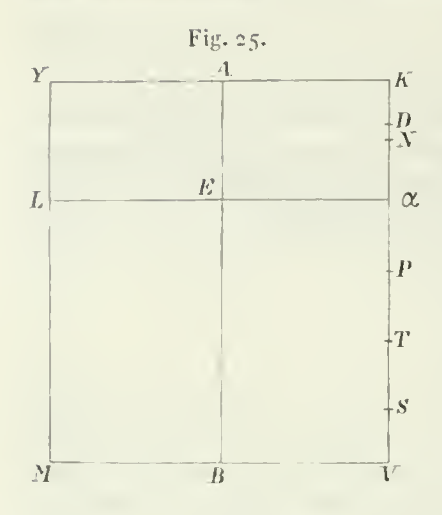


Fig. 25.

4.

Diviso rursus latere KV punctis N et D, nimirum ut rectangulum KNV contineat $\frac{5}{32}$ quadrati MV, KD autem sit $\frac{4}{5}$ KN segmenti minoris. Si Cylindrus ad liquidum in gravitate rationem habeat minorem quam DV, majorem verò quam DK ad KV, et liquido supernatans ponatur inclinatus, ita ut neutra basium contingat liquidi superficiem, ulteriùs inclinabitur, quàm ut altera basium contingat liquidi superficiem in uno puncto.[72])

Dividatur enim praeterea latus KV bifariam in P, et quum manifestum sit, Cylindrum ad liquidum in gravitate habiturum proportionem majorem subduplâ [$\frac{1}{2}$] vel non majorem, habeat primò majorem subduplâ, nempe quam αV habet ad KV (sumpto puncto α intra D et P).

Dico ulteriùs inclinatum iri Cylindrum quàm ut basis YK contingat liquidi superficiem in uno puncto. fiat enim KT aequalis $\frac{4}{5}$ NV segmenti majoris, et KS aequalis ipsi NV. Quia igitur Cylindrus est ejusmodi, ut quadratum à diametro basis MV ad quadratum lateris KV minorem habeat rationem quàm sesquialterum, id est, quam 3 ad 2, erit rectangulum KNV sive $\frac{5}{32}$ quadrati MV, minus quam $\frac{15}{64}$ quadrati KV; quamobrem KN minor erit quam $\frac{3}{8}$ KV, et NV sive KS major quam $\frac{5}{8}$ KV[73]); et KT (quae est $\frac{4}{5}$ NV sive KS) major quam $\frac{4}{8}$ sive $\frac{1}{2}$ KV. Itaque punctum α sumptum inter D et P, cadet etiam inter D et T; Unde sicut in Conclus. 4a. Theor. 11i demonstrari poterit, Cylindrum ulteriùs inclinatum iri quàm ut basis YK in uno puncto contingat liquidi superficiem; quod erat demonstrandum.

Secundò, si Cylindrus ad liquidum in gravitate proportionem habeat non majo-

---

72) La „Conclusio" démontre que toutes les fois que, dans le cas $\zeta > \sqrt{\frac{2}{3}}$, la densité ε se trouvera située entre la plus petite racine de l'équation $2\varepsilon\,(4-5\varepsilon)\,\zeta^2 = 1$ et la plus grande de l'équation $2\,(5\varepsilon-1)\,(1-\varepsilon)\,\zeta^2 = 1$, qu'alors les positions (1) et (2) seront irréalisables.

En la combinant avec la „Conclusio 4" du „Theorema 11" on en peut déduire que ces positions seront irréalisables toutes les fois qu'on aura $\zeta^2 > \frac{1}{2(5\varepsilon-1)(1-\varepsilon)}$ ou $> \frac{1}{2\varepsilon(4-5\varepsilon)}$, c'est-à-dire, que le point (ε, ζ) tombera à l'intérieur de la division TMNPZJU de la représentation graphique de la note 37, p. 176.

73) Toujours à cause de „pr. 5. lib. 2. Eucl." Comparez la note 38, p. 176.

rem ſubduplâ, ea vel ſubduplâ erit vel minor ſubduplâ; et ſiquidem ſubduplâ, tum eadem adhuc quae in caſu praecedenti erit demonſtratio, nam ipſum punctum P cadit inter D et T.

Si verò minor ſubduplâ, invertenda est praecedens figura et eadem rurſus erit demonſtratio, niſi quòd jam pars ea demerſa erit, quae priùs enatabat, et contra.

Experimenta.

Quoniam Parallelepipeda ſive trabes, et Cylindracea corpora ubique obvia ſunt, vel ſaltem facilia paratu, non dubito quin futuri ſint qui facto periculo de veritate horum Theorematum cognoſcere cupient; eos autem monitos velim ne temere credant ſuis experimentis, ut priùs perſpectum habeant ſolida, quibus ad ea utuntur, eſſe e materiâ quae per omnia gravitatis ſit aequalis. Et lignum quidem, quod tantae perfectionis ſit, reperiri poſſe, vix crediderim; metalla autem non niſi argento vivo ſupernatant, alioquin exiſtimo, haec magis accommoda fore.

Sed vitandis hiſce difficultatibus, fabricentur corpora intus cava, et tenui tantum conſtantia ſuperficie. deinde diſponantur introrſus pondera, hâc lege, ut omnium ſimul centrum grav. idem ſit, quod centrum corporis vacui, ſi foret ſolidum; atque ita pro lubitu gravia et levia habebuntur, additis vel demptis ejuſmodi ponderibus.

Fig. 26.

Exemplo ſit Cylindrus AB, tenui conſtans ſuperficie, in quo diſponantur ad oppoſitas baſes pondera paria, velut cylindri aequales è plumbo vel aliâ ponderoſâ materiâ, AC, BD, et plures ſi res exiget; dummodo obſervetur ut pares ſint, qui ab oppoſitis baſibus aeque diſtant; et erit eadem hujus liquido ſupernatantis poſitio, quae cijlindri ſimilis figurae et ponderis, qui totus ſolidus eſſet et è materiâ ſibi ipſi in gravitate per omnia ſimili.

FINIS.

APPENDICE I [1]

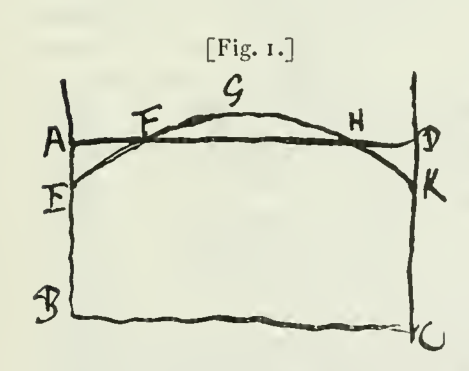
A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].

Si corpus unum vel plura moveri incipiant, ea deorſum moveri, id eſt ut centrum gravitatis propius fiat plano horizonti parallelo.

Si quotcunque corpora ſponte ſeu gravitate ſuâ moveri incipiant, centrum gr. ex ijs omnibus compoſita propius fieri plano horizonti parallelo.

[Fig. 1.]



Igitur quantum liquidi prius continebatur ſpatiis EAF, KDH quae ſunt infra planum AD, tantum nunc ſupra idem planum continetur ſpatio FGH; tunc vero cum adhuc componebatur ſpatiis EAF, KDH, centrum gravitatis habebat infra planum AD, at nunc dum occupat ſpatium FGH habet c. gr. ſupra planum AD, itaque nunc altius habet, at reliqui liquidi, quo plenum eſt ſpatium EFHKCB, centr. gr. eodem manet loco, Ergo omnis liquidi centr. gr. altius eſt quum continetur ſpatio EFGHKCB quam cum terminatur ſuperficie plana AD; Sed quia liquidum ſponte motum ponitur, debet centr. ſuae grav. eo motu deſcendiſſe, igitur ſimul deſcendit et aſcendit quod eſt abſurdum.

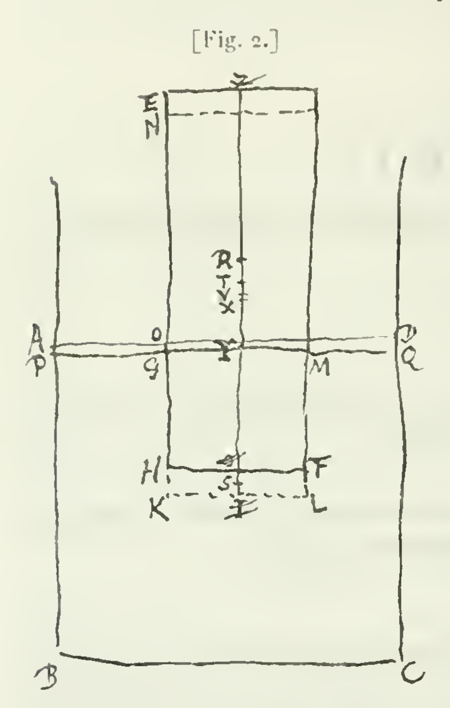
---

[1]) L'Appendice contient une autre rédaction du début du „Liber 1," jusqu' à la fin de la démonstration du „Theorema 4".

Corpus ſolidum levius liquido ita ei ſupernatat, ut pars merſa ad totum eam habeat rationem quam corpus habet ad liquidum in gravitate.

Eſto vas ABCD continens liquidum, cui impoſitum ſit corpus EF formam habens cylindri vel parallelipipedi, (nam quod de his oſtendetur, etiam reliquis corporibus convenit) eâ ratione, ut pars demerſa GHFM ſit ad totum ſicut corpus EF ad liquidum, in gravitate, id eſt ſicut gravitas corporis EF, ad gravitatem liquidi ſuae magnitudinis. Diço corpus EF neque ulterius demerſum iri neque altius emersurum.

[Fig. 2.]



Nam ſi fieri potest demergatur primò ulterius, ita ut jam occupet spatium NL, et pars liquidi quae continebatur ſpatio HL aſcendet in ſpatia AG, MD.

Quia igitur corpus EF ultro mouetur, oportet centrum gravitatis univerſae (quae componitur ex omni liquido et ex corpori ipſi impoſito) hâc poſteriori corporis poſitione inferius eſſe quam priori *a* [2]).

Verum utràque corporis poſitione contingit ſpatium PGKLMQCB [3]) eſſe plenum liquido cujus proinde centrum gr. manet eodem loco. Ergo debet centrum gravitatis reliquae altius eſſe corporis poſitione priori quandò ea gravitas conſtat ex corpore EF et parte liquidi HL, quam posteriori poſitione quum conſtat ex corpore NL et parte liquidi quae aſcendit in ſp^m^. AQ. Sit R c. gr. corporis EF, T vero c. gr. ejuſdem corporis quum occupat ſpatium NL; ſit item S c. gr. liquidi HL, et Y liquidi ejusdem quum aſcendit in spatium AQ. et diviſa intelligatur RS in punćto X ut ſit reciproce SX ad XR, ſicut gravitas corporis EF ad gravitatem liquidi HL, eandemque rationem habeat YV ad VT: Erit hâc ratione X c. gr. compoſitae ex corpore EF et liquidi parte HL; V vero c. gr. compoſitae ex corpore NL et parte liquidi AQ. Itaque ſecundum ea quae diximus deberet centrum X centro V altius eſſe, quod eſt abſurdum namque contrà oſtenditur altius eſſe V ipſo X.

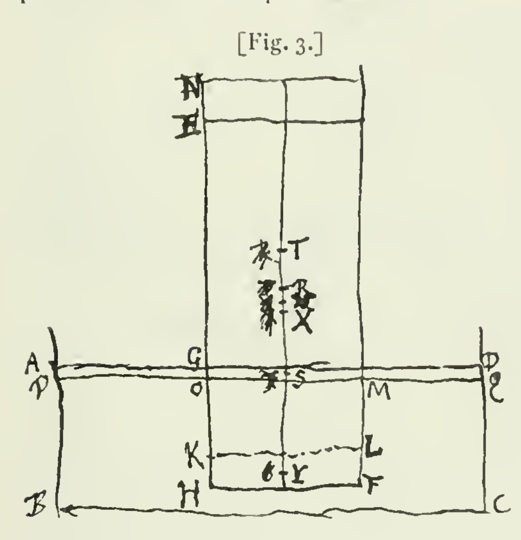
[2]) Huygens annota en marge „*a* Hyp. 1".

[3]) A propos de ce qui suit Huygens annota en marge: „1654 Vide an non melius aqua tantum ad latera corporis intelligatur, non undique circumfusa. Saltem si parti OM circumfunditur, etiam ipsi GF circumfundi necesse est?"

Proportionem liq[uid]i ad corpus ſupernatans in gr[avitat]e, id eſt gr[avit]atis liquidi m[a]gn[itudin]is EF ad gr.em corporis EF ſimilis poſita eſt ei quam habet EH ad GH, quam autem habet EH ad GH eam quoque habet gr[avit]as liq[uid]i m[a]gn[itudini]is EF ad gr. l[i]q[ui]di m[a]gn[itudin]is GF, ergo gravitas liq.i magn.is EF ad gr.em corporis EF eandem habet rationem quam ad gr. liq.i mgn.is GF; quare conſtat gr. liq.i mgn.is GF aequalem eſſe gr.i corporis EF.

Sicut autem gravitas liquidi magn.is GF ad grav. liquidi HL ita eſt latus GH ad HK, igitur ut GH ad HK ita grav. corporis EF ad gravitatem liquidi HL, atque ita proinde SX ad XR, et YV ad VT. quum verò diſtantia centrorum R, T, ſit aequalis corporis deſcenſui OI [4]), SY vero major quam HG dimidiâ HK et dimidiâ OG, major quoque erit ratio SY ad TR quam GH ad HK, vel quam YV ad VT, has enim easdem eſſe modo oſtenſum fuit. quare eſt componendo major ratio SV ad VR quam GH ad HK, ut autem GH ad HK ita diximus eſſe SX ad XR, ergo major eſt ratio SV ad VR quam SX ad XR, unde patet punctum V puncto X altius eſſe quod erat oſtendum. Non poteſt itaque corpus EF ulterius demergi: At jam ſi fieri poteſt altiùs emergat ut occupet ſpatium NL [Fig. 3], et liquidum ex ſpatio AQ deſcendat ad replendum ſpatium KF. Rurſus igitur debet centr. gr. univerſae moto corpore deſcendiſſe. Verum ſpatium POHFMQCB utrâque corporis poſitione plenum eſt liquido, cujus propterea centrum gr. manet eodem loco, Igitur centrum gravitatis reliquae, priori corporis poſitione cum conſtat ipſa ex corpore EF et parte liquidi AQ, debet altior eſſe quam poſteriori cum conſtat ex corpore NL et parte liquidi KF. dividatur ſpatium RS, quo diſtat centr. gr. corporis EF à centr. gr. liquidi AQ, in puncto X, ut ſit SX ad XR ſicut gravitas corporis EF ad gr. liquidi AQ, eâdemque ratione punctum V dividat ſpatium TY quo diſtant centra gr. corporis NL et liquidi KF.

[Fig. 3.]



Centrum igitur compoſitae gravitatis de quâ quaeritur priori corporis poſitione eſt X poſteriori V; deberetque rurſus X quam V altius eſſe, Quod eſt abſurdum;

[4]) Lisez HK ou FL, les lettres O et I étant biffées dans la figure.

nam contrarium ita oſtendemus. Gravitas liqu. magn.^{is} GF (ſicut ſupra hoc eodem Theor. demonſtratum fuit) aequat grav.^{m} corporis EF, ut autem gr^{as}. liq. magn.^{is} GF ad gr.^{m} liq.^{i} KF ita eſt latus GH ad KH, ergo ut GH ad KH ita quoque eſt gr.^{as} corp.^{is} EF ad gr.^{m} lqdi KF, atque ita proinde SX ad XR, et YV ad VT; Quum autem diſtantia centrorum RT neceſſario aequalis ſit corporis aſcenſui HK, at SY minor quam GH, (dimidiâ nimirum KH et dimidia GO) minor quoque erit ratio SY ad RT quam GH ad KH vel quam SX ad XR; quare et componendo minor ratio YX ad XT quam GH ad KH, ſed ut GH ad KH ita etiam eſt YV ad VT. Ergo minor eſt ratio YX ad XT quam YV ad VT, unde apparet punctum V puncto X altius eſſe, contrà quam oportebat. Nec poterit igitur corpus EF altius emergere, ſed nec alterius demergi poſſe oſtenſum fuit, Supereſt itaque ut liquido ſupernatet demerſa parte GF quod erat demonſtrandum.

APPENDICE II [1]

A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

25 JANVIER 1652.

25 Jan. 1652.

[PREMIÈRE PARTIE.] [2]

[Fig. 1.]

Angulum BDL in aequalia secat DA, ABD angulus rectus. triangulum KDL aequale triangulo BDE.[3] *AP perpend. in KL. Ostendendum est AP majorem esse quam AC.* [4]

Sit DG perpend. in KL. et duabus CD, HD sit tertia proportionalis HQ. [5]

---

[1]) Dans les deux premières parties de cet Appendice, que nous avons divisé en trois parties, Huygens s'occupe des conditions de stabilité de l'équilibre du cône de révolution homogène flottant dans une position verticale; le sommet en bas. Pour s'en convaincre on n'a qu' à comparer les figures et le texte avec ceux du „Theorema 14" (p. 115) du „Lib. 1". En effet, le point A des deux figures de la pièce présente représente le centre de gravité du cône. Il est donc identique avec le point G de la figure 17 (p. 115); de même les lignes BE et KL, DB et DE, AC et AP correspondent aux lignes NO et PQ, BN et BO, GM et GS de la même figure 17. En conséquence le triangle KDL doit toujours égaler le triangle isoscèle BDE.

La troisième partie de cet Appendice traite l'équibre du cône de révolution dans une situation inclinée.

[2]) Dans cette première partie Huygens' s'efforce à démontrer la stabilité de l'équilibre sous les

Quoniam vero aequalia sunt △ u[m] isosceles BDE, KDL △ °, angulusque utrique communis ad D. ex eo consequuntur haec; nimirum quod ▭ contentum duabus KD, DL aequale contento à BD, DE seu quo. BD. et quod KD, DL utraque simul major utrâque BD, DE. triangula verò HDL, HDK simul aequantur triangulis CDE; CDB. comprehenditurque uniuscujusque lateribus angulus idem nempe dimidius anguli BDL. quare constat contentum sub HD et tota KDL [6]) aequari contento sub CD et tota BDE. sicut igitur tota KDL ad BDE ita CD ad HD, ergo CD quoque major HD.

Erit autem et CDq. ad q. HD ut q. ex KDL tanquam una ad q. totius BDE, sive ut quarta pars qu.i ex KDL ad q. BD hoc est ▭ KDL. [7])

Sicut autem ▭ KDL[8]) ad $\frac{1}{4}$ q. ex KDL[6]) ita ▭ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL, quia KL dividitur similiter in H ut KDL in L [9]): Ergo q. HD ad q. CD ut ▭ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL. Verum qu. CD est ad q. DG ut $\frac{1}{4}$ q. KL ad qu. BC, (namque CD est ad DG ut KL ad BC [10]) quia aequalium △ orum BDE, KDL reciprocantur bases et altitudines.) Ex aequo igitur erit q. HD ad q. DG ut ▭ KHL ad qu. BC.

---

conditions formuleés au „Theorema 14", cité dans la note précédente, par la méthode qu' il a suivie partout dans le premier livre du traité présent, c'est-à-dire en partant des „Theoremata 6 et 7" (p. 103—104) du „Liber 1". Il doit donc démontrer qu'on a, sous ces conditions. AP > AC.

Or, il est clair que dans la figure 17 (p. 115) la ligne GN, qui correspond à la ligne AB des figures de l'Appendice présent, serait parallèle à la ligne DX, d'où il suit facilement que l'angle GNB, (l'angle ABD des figures présentes) sera, sous les conditions du „Theorema 14" plus petit que l'angle DFB = DEB; c'est-à-dire plus petit qu' un angle droit; supposition qu'on retrouvera plusieurs fois dans cette pièce.

Toutefois Huygens a débuté, en composant cette première partie, par supposer dans la Fig. 1 de cet Appendice ABD = 90°; soit parce que ce cas limite de la stabilité l'intéressait particulièrement; soit parce qu'il croyait pouvoir arriver facilement a la démonstration du cas général, celle du cas particulier une fois trouvée. Ainsi, après avoir achevé cette dernière démonstration, il a commencé par y apporter les changements nécessaires pour l'accommoder au cas plus général; mais alors, comme nous l'indiquerons dans la note 16, il a fait fausse route.

Dans ces circonstances il nous semblait préférable de donner la pièce telle qu'elle avait été conçue primitivement, mettant entre crochets les mots biffés après coup et indiquant dans les notes les changements apportés par Huygens pour la rendre applicable à la supposition plus générale ABD < 90°.

3) Voir la démonstration du „Lemma 2", p. 113—114, vers la fin.

4) En tête de la pièce on lit encore: „τὸ *Erat autem* in hac deme. non omittendum."

5) Lisez DQ.

6) C'est-à-dire KD + DL.

7) Huygens ajouta plus tard: „invertenda est ea ratio. [▭ KDL] ad $\frac{1}{4}$ q. KDL potius. et sic deinceps."

8) C'est-à-dire le rectangle qui a KD et DL pour côtés.

9) Lisez D.

10) Lisez BE.

Aequale eſt autem □ KHL ei quo □ KDL, cui aequale q. BD, excedit qu. DH. Ergo eſt qu. HD ad q. DG, ſicut id quo q. BD excedit qu. DH ad q. BC. Est autem quo. BD [aeq.] [11]) □ CDA quia ang. ABD [rectus] [12]); quo. autem HD aeq. □ CDQ, quia ut CD ad HD ita ſecimus eſſe HD ad QD; at □ CDA excedit □ CDQ □° ſub CD, QA, ergo erit quoque exceſſus q. BD ſupra qu. DH [aeq.] [13]) □° ſub CD, QA. itaque qu. HD ad q. DG [ut] [14]) □ CD, QA ad q. BC hoc eſt □ DCA. [15]) Sicut autem □ CD, QA ad □ DCA ita eſt QA ad CA, ergo q. HD ad q. DG, ſive q. HA ad q. AP [ut] [16]) QA ad CA. Eſt verò CD major quam HD; ſuntque in continua prop.^e CD, HD, QD; ergo erit CH exceſſus major quam HQ. CA vero minor eſt quam HA; minor igitur ratio QH ad HA quam CH ad CA. et componendo minor ratio QA ad HA quam HA ad CA; ratio igitur QA ad CA minor quam duplic. ejus quam habet HA ad CA; hoc eſt minor rationem qu^i. HA ad CA. [17]) ſed ratio QA ad CA [eadem] [18]) oſtenſa eſt quam qu^i. HA ad q. AP. minor igitur ratio q. HA ad q. AP quam ejuſdem q. HA ad q. AC. Quare q. AP majus eſt qu. AC, et AP major AC: q. er. d. [19])

---

[11]) Huygens remplaça „aeq." par „non majus". Voir la note 2. Mais lisez: „non minus."

[12]) Huygens remplaça le mot „rectus" par la phrase „non major recto, nam si rectus est aeq. est qu. BD □° CDA."

[13]) Remplacé dans la seconde rédaction par „non minor", ce qui est vrai dans la supposition ABD $\leqq 90°$,

[14]) Remplacé par „non majorem habebit rationem quam".

[15]) Huygens intercala ici: „oportuit ostendere □ DCA non maj. q. BC;" mais nous verrons que ce changement ne suffit pas pour sauver la démonstration appliquée à la supposition ABD $\leqq 90°$.

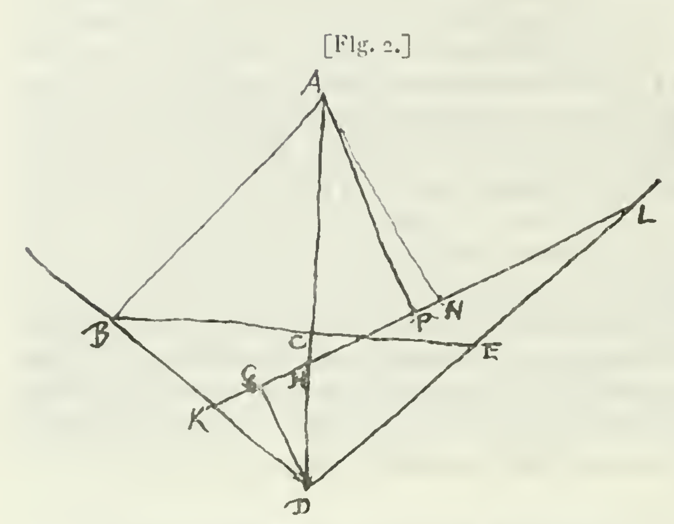
[16]) Remplacé par „non major quam". Mais cette conclusion n'est pas justifiée. Pour le montrer il suffit de remarquer, que si ε et ε' représentent des quantités ou positives, ou nulles, il a été démontré: $HD^2 : DG^2 = CD \times QA + \varepsilon : CD \times CA + \varepsilon'$, mais évidemment on n'a pas le droit d'en conclure $HD^2 : DG^2 \leqq QA : CA$. Dès ce moment la démonstration doit donc être considérée comme manquée pour ce qui concerne le cas plus général; mais elle reste rigoureuse pour le cas ABD $= 90°$,

[17]) On a en effet: $\frac{QA}{CA} = \frac{QA}{HA} \times \frac{HA}{CA}$; mais comme on l'a vu $\frac{QA}{HA} < \frac{HA}{CA}$, donc aussi: $\frac{QA}{CA} < \frac{HA^2}{CA^2}$.

[18]) Remplacé par: „non minor". Comparez la note 16; il s'agit de la même relation prise en sens inverse.

[19]) Sur une feuille détachée on retrouve en partie l'analyse qui, évidemment, a servi de point de départ pour la partie qu'on vient de lire. Elle porte l'inscription „ad modum meum" (comparez la note 29). On y lit ensuite „GD ∞ y" (voir la fig. 1 du texte). De plus Huygens a représenté CD par b, $BD^2 = KD \times DL$ par ab, HD par c. On a alors $BC^2 = ab - bb$ et au moyen de la proportion $GD^2 : CD^2 = 4BC^2 : KL^2$ Huygens trouve facilement □ KL $= \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$. De même, par la relation: $HD\,(KD + DL) = 2\,BD \times DC$, mentionnée à la page 196 du texte, on trouve □ $(KD + DL) = \frac{4ab^3}{cc}$. Ensuite la proportion □ (KD +


[Seconde partie.] [20])



Poſitis iisdem quam prius [21]) *KL praeterea diviſa per medium in N.* [22]) *Oſtendendum quod HN major quam HP.*

1. [23]) Quadr. HD eſt ad ▭ DHA ut DH ad HA, eâdem ratione ut DH ad HA ita quoque ▭ DHA ad qu. HA, ergo qu. DH ad ▭ DHA ut ▭ DHA ad qu. HA. quia autem angulus ABD non major recto, eſt q. BD non minus ▭ CDA ideoque majus ▭° HDA, [24]) ac proinde major exceſſus q.i BD seu ▭i KDL ſupra q. HD hoc eſt majus ▭ KHL exceſſu ▭ HDA ſupra qu. HD, id eſt, major [25])

+ DL): ▭ KDL = □ KL : ▭ KHL (où ▭ KHL = ▭ KDL − $DH^2 = ab - cc$) qu'on retrouve également dans le texte, conduit immédiatement à la relation $\frac{4ab^3}{cc} : ab = \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy} : (ab - cc)$, d'où Huygens déduit $cc : (ab - cc) = 4bb : \frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$; puis il ajoute: „sed est etiam yy [GD^2] ad $ab - bb$ [BC^2] ut $4bb$ [$4CD^2$] ad $\frac{4ab^3 - 4b^4}{yy}$ [KL^2] ergo cc [DH^2] ad $ab - cc$ [▭ KHL] ut yy [DG^2] ad $ab - bb$ [BC^2]: proportion qu'on retrouve, sous un autre arrangement, dans le texte même à la dernière ligne de la page 196.

[20]) Dans cette seconde partie Huygens démontre la stabilité de l'équilibre sous les conditions du „Theorema 14" (p. 115) par la méthode d'Archimède; c'est-à-dire par la considération du couple qu'on obtient en appliquant au centre de gravité A du cône une force dirigée vers le bas et au centre de gravité N de la partie immergée une force égale dirigée vers le haut. Or, comme AP est la direction de la gravité dans la position inclinée du cône, il suffira de prouver qu'on ait HN > HP, puisqu' alors le couple en question tendra à ramener l'axe DA du cône vers la situation verticale.

[21]) Voir la première partie; mais il s'agit ici de la supposition la plus générale, c'est-à-dire, ABD ≦ 90°. Comparez la note 2.

[22]) Par cette construction le point N coïncide avec le point R de la Fig. 17 (p. 115), c'est-à-dire, avec le centre de gravité de la partie immergée du cône.

[23]) La numération est de Huygens et nous avons arrangé la pièce qui suit en accord avec elle.

[24]) Puisque HD < CD comme il a été démontré dans la première partie de cet Appendice.

[25]) Lisez „majus", puisqu'il s'agit de démontrer „▭ KHL majus ▭° DHA." En effet, le „majus" qui précède dans le texte remplace un „major", qui s'y trouvait primitivement; mais ce même changement a été oublié ici.

▭° DHA. Sicut autem qu. DH ad ▭ DHA ita erit hoc ipſum ad qu. HA. Ergo minor ratio eſt qu.i DH ad ▭ KHL quam hujus ad qu. HA. Sicut autem ▭ KHL ad q. AH ita erat excess. q.i CD ſupra q. HD ad q. HP [26]); ergo minor quoque ratio qu.i DH ad ▭ KHL quam exceſſus q.i CD ſuper q. HD ad q. HP. Erat autem ut q. HD ad ▭ KHL ita exceſſus q.i CD ſupra q. HD ad q. HN. [27]) Itaque minor ratio exceſſ. q. CD ſupra q. HD ad qu. HN quam ejuſdem exceſſus ad q. HP; Quare qu. HN erit majus q°. HP, et HN major HP. quod erat demonſtrandum.

2. Oſtenſum verò eſt in ſuperiori demne [28]) quod q. HD ad q. DG ut ▭ KHL ad q. BC; ideoque et per convers. rationis erit qu. HD ad qu. HG ſive qu. AH ad qu. HP, ut ▭ KHL ad exceſſum ▭ KHL ſupra q. BC, hoc eſt ad exceſſum qu.i CD ſupra q. HD, nam ▭ KHL una cum q. HD aequatur ▭ KDL, eidem huic ſive qu° BD aequantur duo q.a BC et CD, ideoque quanto ▭ KHL majus qu.° BC, tanto minus eſt q. HD q.° CD. Erit autem et permutando et conver.° ▭ KHLad qu. AH ut exceſſus qu.i CD ſupra q. HD ad q. HP.

3. Oſtenſum eſt ſuprà, quod qu. HD ad qu. CD ut ▭ KHL ad $\frac{1}{4}$ q. KL hoc eſt ad q. ex KN. [29]) Invertendo igitur et per convers. rationis erit qu. CD ad exceſſum ejuſdem qu. CD ſupra q. HD ut qu. KN ad qu. HN, hoc enim aequatur exceſſus quadrati KN ſupra ▭ KHL. et permutando, qu. CD ad qu. KN ut exceſſus q.i CD ſupra q. HD ad q. HN. diximus autem eſſe q. HD ad q. CD ut ▭ KHL ad q. KN, ideoque erit permutando q. CD ad q. KN ut q. HD ad ▭ KHL. Verum ut q. CD ad q. KN ita erat exceſſus qu.i CD ſupra qu. HD ad q. HN; Ergo quoque ut q. HD ad ▭ KHL ita erit excess. qu.i CD ſupra q. HD ad q. HN. [30])

---

[26]) Voir, pour la démonstration, l'alinéa qui a été numéroté 2 par Huygens. Sur la feuille du manuscrit elle précédait celui numéroté 1.

[27]) Voir, pour la démonstration, l'alinéa numéroté 3.

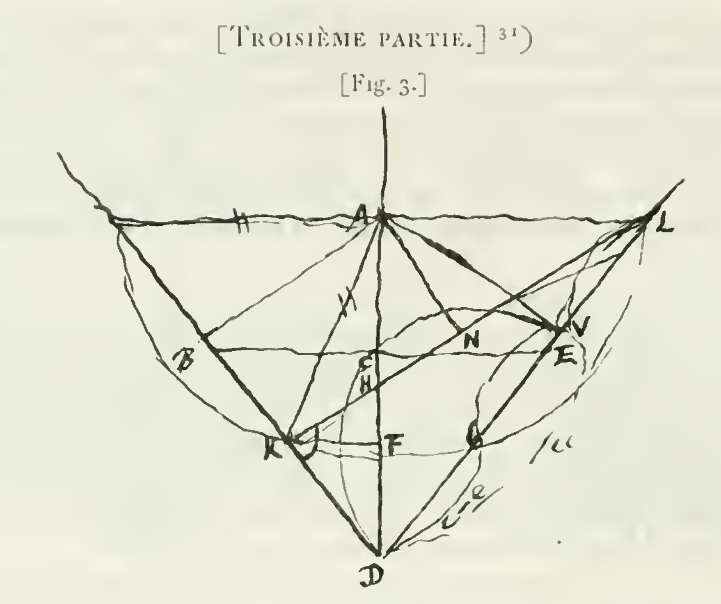
[28]) Voir encore, dans la première partie de cet Appendice, à la page 196, la dernière ligne du texte.

[29]) Voir, dans la première partie, p. 196, la phrase qui suit le signe 9).

[30]) Sur la feuille, mentionnée dans la note 19, on trouve encore, sous l'inscription „ad modum Archim." l'analyse incomplète qui suit. Partant de la proportion □ (KD + DL) : ▭KDL = □KL : ▭ KHL, Huygens, employant les notations de la note 19 à l'exception de l'y qui représente maintenant la ligne HN, écrit, comme il avait trouvé auparavant, $\frac{4ab^3}{cc}$ pour □(KD + DL), ab pour ▭ KDL: ensuite $\frac{4ab^3}{cc} - 4bb$ pour □KL (formule correcte qu'on déduit aisément de la proportion par laquelle l'alinéa numéroté 3 débute, puisque ▭ KHL

[TROISIÈME PARTIE.] [31])

[Fig. 3.]



AD ∞ a; AL ∞ b; CD ∞ n [32])

AD (a) ad CD (n) ut CD (n) ad FD $\left(\frac{nn}{a}\right)$ [33]) s.

ex AD (a)

$a - \frac{nn}{a}$ AF

$= ab - cc$) et enfin pour ▭ KHL $\frac{ab^3}{cc} - bb - yy$; ce qui est exact, puisqu'on a : KH × HL $= (\text{KN} - \text{HN}) \times (\text{LN} + \text{HN}) = \frac{1}{4}\,\text{KL}^2 - \text{HN}^2$. Ainsi il obtient la proportion $4\frac{ab^3}{cc} : ab = \left(4\frac{ab^3}{cc} - 4bb\right) : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb - yy\right)$, qui amène successivement: $bb : cc = \left(\frac{ab^3}{cc} - bb\right) : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb - yy\right)$; $(bb - cc) : bb = yy : \left(\frac{ab^3}{cc} - bb\right)$; $\left(\frac{ab^3}{cc} - bb\right) : bb = yy : (bb - cc)$ et enfin $(ab - cc) : cc = yy : bb - cc$; ou bien ▭ KHL : □ HD = □ HN : □ CD — □ HD ce qui constitue la relation par laquelle le texte finit.

[31]) Dans cette troisième partie, très peu achevée quant à la forme, Huygens détermine la condition sous laquelle un cône de révolution pourra flotter, le sommet en bas, dans une position inclinée, de manière que le cercle de base touche justement à la surface du liquide.

En effet, si l'on se reporte à la figure 17, p. 115, du „Liber I", on voit que dans cette figure pour une telle position la surface HI du liquide passera par le point C; mais, puisque PQ passe par le centre de gravité R du cône HIB, on a toujours $\frac{\text{BI}}{\text{BQ}} = \frac{3}{4} = \frac{\text{BD}}{\text{BG}}$. On aura donc pour la position que nous considérons: $\frac{\text{BC}}{\text{BQ}} = \frac{\text{BD}}{\text{BG}}$, d'où il suit que GQ sera parallèle à DC.

Or, la ligne PQ de la figure 17 est représentée dans les figures de l'Appendice présent par

AD (a) ad AL (b) ut DF $\left(\frac{nn}{a}\right)$ ad FK $\left(\frac{bnn}{aa}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{bbn^4}{a^4} \ \square \ \text{FK} \\ \frac{a^4 - 2aann + n^4}{aa} \ \square \ \text{AF} \end{array}\right\} a.$$

$\square$ AL per a^4. $bba^4 \propto bbn^4 + aan^4 - 2a^4nn + a^6$ q. AK per a^4

$$2a^4nn + bba^4 - a^6 \propto bbn^4 + aan^4$$

$$\frac{2a^4nn + bba^4 - a^6}{bb + aa} \propto n^4$$

Sit [34]) AV perp. in DL ergo $\square$ DV $\propto \frac{a^4}{aa + bb}$ sit hoc $\propto cc$ ergo:

$$2ccnn + bbcc - aacc \propto n^4$$

$nn \propto cc - \sqrt{c^4 + bbcc - aacc}$ sed q. AV $\propto aa - cc \propto dd$

$nn \propto cc - \sqrt{bbcc - ddcc}$ sed $bb - dd \propto$ q. VL $\propto ee$

$nn \propto cc - ec$. [35])

KL et le point G par A. Dans la figure présente AL devra donc, pour la position considérée, être perpendiculaire sur AD. En même temps l'équilibre exige, d'après le „Theoreme 1" du „Liber II" (p. 122) que la ligne AN (où N représente le centre de gravité de la partie immergée) soit perpendiculaire au niveau du liquide, donc aussi à KL. D'autre part on a KN = NL, d'où il suit AK = AL et c'est cette relation qui va servir à déterminer la condition cherchée.

[32]) Comme partout dans les figures de cet Appendice, le point C représente le centre de gravité de la partie immergée dans la situation verticale de l'axe du cône; A celui du cône entier. La densité du cône sera donc à celle du liquide comme n^3 à a^3. De plus on aura DK $\times$ DL = = BD $\times$ ED.

[33]) On a, d'après la note précédente, LD : ED = BD : KD; mais LD : ED = AD : CD et BD : : KD = CD : FD; donc aussi AD : CD = CD : FD.

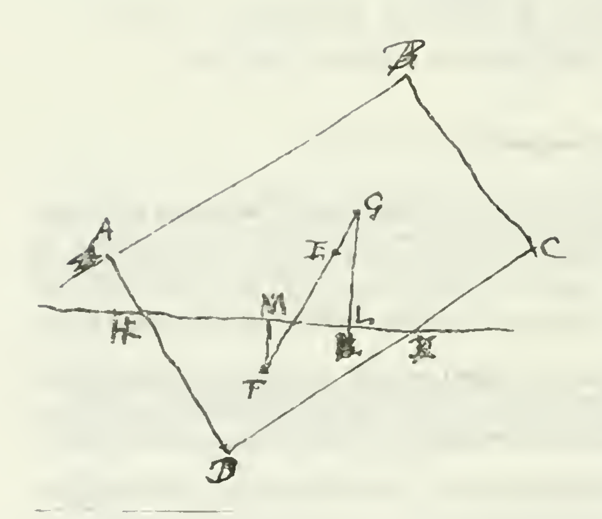
[34]) Ayant trouvé la relation cherchée, Huygens se propose de la simplifier et d'en déduire la construction. Ajoutons que la résolution directe de l'équation quadratique en n^2 amène les racines $n^2 = a^2$ et $n^2 = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$. La première de ces racines conduit à la supposition que la densité du cône est égale à celle du liquide, auquel cas en effet, LK se superposant avec AL, la condition AK = AL est satisfaite. Le cône, il est vrai, pourra flotter alors avec le cercle de base tout entier au niveau du liquide; mais ce n'est pas là la solution désirée. Celle-là est obtenue au moyen de la seconde racine.

[35]) En effet, on vérifie aisément qu'on a : $cc - ec = \frac{a^2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2}$. De plus, on voit que l'autre solution $cc + ec$ = DV $\times$ DL = AD^2, mène à $n = a$. Ajoutons que la construction n'est pas achevée dans la figure. Le demi-cercle, qu'on voit tracé sur DV comme diamètre, y pourra servir, mais elle ne passera pas par le point C.

APPENDICE III[1]

A L'OUVRAGE: DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

[1650].



Cadant enim in liquidi ſuperficiem perpendiculares è centris G et F quae erunt GL, et FM. [2])
et manifeſtum eſt diverſa fore puncta L et M quoniam linea FG non ſecat liq. ſup.m ad angulos rectos.

Conſideratis autem ſeparatim corporis partibus, apparet [3]) quidem HABÇK partem incumbere parti merſae HDK, atque ita eam premere ac ſi tota ejus gravitas ſuperſtaret puncto L; quoniam perpend. GL descendit e centro

[1]) Cet appendice contient une autre démonstration du „Theorema 1", p. 122. du „Liber II."

[2]) Le manuscrit fait suivre encore la phrase biffée: „Quoniam igitur et has quidem non posse in eandem lineam rectam incidere manifestum est."

[3]) Le manuscrit faisait suivre primitivement les phrases suivantes, biffées depuis: „quidem HDK partem quae infra liq. sup.m demersa est, esse leviorem liquido suae molis ideoque eam conaturam emergere nisi centrum suae grav. F ascensu prohibeatur, id est, nisi pars ipsa prematur in puneto quod sit in perpend.m FM. atqui à pondere partis HABCK premitur eâ ratione, ac si totam hujus gravitas incumberet super puneto L; itaque constat ab hoc presso nihil non impediri centrum F quo minus ascendat at contra constat hoc ipso adjutum iri." De même on lisait en marge„ primo pars ABCD. ſimiliter HDK."

gr. Rurſus pars merſa HDK quoniam levior eſt liquido ſuae molis conatur aſcendere, atque eâ ratione premit partem HABCK quaſi tota levitatis vis collecta foret in puncto M, quoniam hoc ad perpend. ſuperſtat centro gr. F. Itaque ſic ſe res habet, ac ſi corpus ABCD deorſum premeretur in puncto L, et ſurſum in punctum M, quo fieri neceſſe eſt ut circumvertatur in eam partem ad quam inclinat linea FG; quod erat dem.

APPENDICE IV [1]

A L'OUVRAGE : DE IIS QUAE LIQUIDO SUPERNATANT.

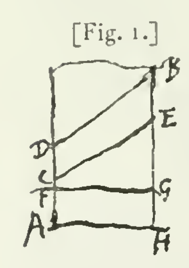
[1650].

Pars Cylindri quae inter duo plana parallela, cylindrum oblique ſecantia continetur, fruſtum cylindri vocatur.

PR[OPOSITIO]. 1. *Fruſtum cylindri aequale eſt cylindro ejuſdem cylindri parti, qui latera habeat lateribus fruſti aequalia.*

A cylindro AB abſciſſa ſint fruſtum DE et cylindrus FH, quorum latera DC, FA ſint aequalia ideoque et HG, EB. dico fruſtum DE aequale eſſe cylindro FH. additâ enim utrinque ÇF aequalibus AF et CD erit AC aequ. FD; eademque ratione HE aequ. GB. Habet itaque cylindri portio ACEH latera lateribus portionis FDBG aequalia, verum et baſes AH, EC baſibus FG, DB aequales et ſimiliter poſitas, itaque manifeſtum eſt ipſas portiones ACEH, FDBG inter ſe ſimiles et aequales eſſe, quare ablata portione communi FCEG, remanet fruſtum DE aequale cylindro FH, q. er. dem.

[Fig. 1.]

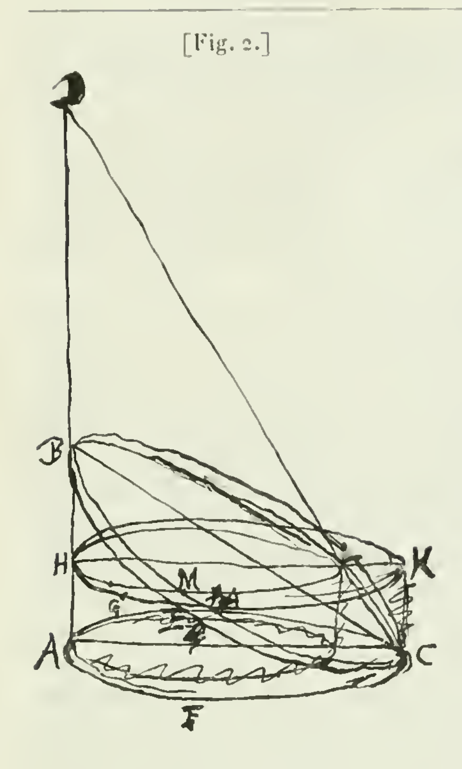


PR. 2. *Si ſuper cunei Cylindrici baſe circulari conus ſcalenus conſtituatur cujus vertex ſit in producto cunei latere, cadet cunei convexa ſuperficies extra conicam, eritque coni pars ſolida quae intra cunea comprehenditur, ipſo cuneo minor.*

Eſto Cuneus cylindricus ABC [Fig. 2] et ſuper ejus baſe circulari AFC conſtitu-

[1]) L'appendice contient une déduction, d'après les méthodes des anciens, du „Theorema 3," p. 160, du „Liber III" de l'ouvrage : „De iis quae liquido supernatant." Comparez la note 2 du „Liber" cité, p. 158 du Tome présent.

[Fig. 2.]



tus conus ADC cujus vertex D sit in producto cunei latere AB faciens in plano BEC sectionem ellipsin BMC. dico cunei convexam superficiem cadere extra superficiem coni ADC.

Sumatur enim in cunei superficie convexa quodcunque punctum G, constructoque super baseo AFC cylindro AK, secentur simul hic et conus plano HGK, per punctum G transeunte, quodque aequidistans basi AC; fiet igitur cylindri sectio circulus HEK, coni vero, circulus minor HML qui priorem intus contingit in puncte H lateris BA. Itaque major minorem undique comprehendit, et punctum G quod est in majori circumferentia HEK erit extra minorem HML, circulus autem HML est plani per HGK sola pars quae intra conum ADC continetur. Igitur punctum G erit extra conum ADC. Eadem erit demonstratio si alia puncta in cunei convexa superficie sumantur; tota igitur est extra conum.

Atqui hinc quoque manifestum est ellipsin BMC ab ellipsi BEC quae in eodem plano et circa eandem diam. est contineri, quum sit BEC circumf. in superficie convexa cunei at BMC in superficie conica: Et patet cuneum cylindricum coni parte quam comprehendit majorem esse, duabus figuris solidis, qualis est ea quae continetur superficiebus curvis BECFA, BMCFA et planâ BMCE.

Pr. 3. *Dato Cuneo Cylindrico, potest super ipsius base circulari Conus scalenus constitui verticem habens in producto cunei latere cujus pars intra cuneum comprehensa deficiat à cuneo magnitudine figura solidâ, quae minor sit quacunque datâ.*[2])

Detur cuneus cylindricus ABC [Fig. 3] cujus basis circularis sit circa diametrum AC, elliptica vero circa diametrum BC. diviso AB latere bifariam in F, exstruatur super base AC cylindrus AFGC; quem constat cuneo aequalem fore; diameter vero superioris basis FG secabit quoque BC per medium in E. denuo intra cylindrum AG extruatur cylindrus AK qui ab ipso AG

[2]) Huygens aura recours à cette proposition dans la démonstration de la „Pr. 6.'

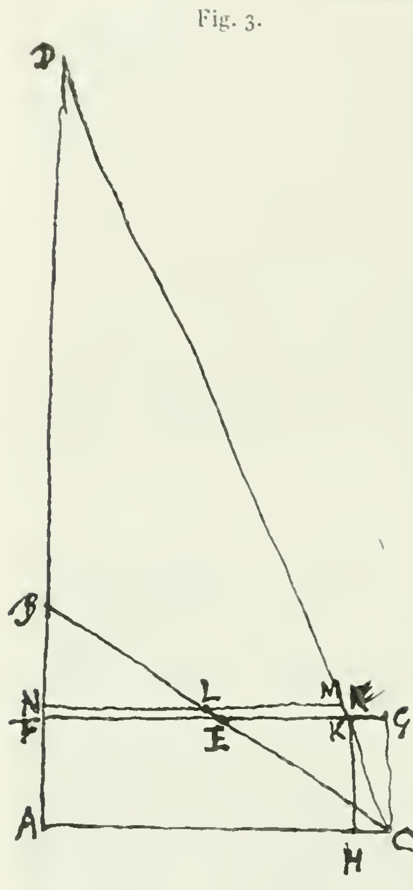


Fig. 3.

deficiat folido minore quam fit magnitudo data. diametri vero bafium AH, FK conveniant cum diametris AC, FG, ductaque CKD quae conveniat cum producto latere AB, intelligatur conus fcalenus ADC; dico partem hujus quae intra cuneum ABC continetur ab eodem cuneo deficere folido minore quam fit data magnitudo.

Sit enim inter FE et EK media proportion. LM aptata intra lineas BC, DC ut parallela fit diametro AC, eaque producatur usque in latus AB in N, et fecundum MN ducatur planum bafi AC aequidiftans quod conum circulo fecabit, conftat autem hoc magis à bafi AC diftare debere quam planum FG, quoniam LM major eft neceffario quam EK. Cum autem quadr. LM aequale fit rect. FEK et FK, LM parallelae fint, fequitur fi per E punctum defcribatur in plano ADC hijperbole ad afymptotos DA, DC, eam contactum iri à recta ML in puncto L,[3]) fed eadem quoque tangetur à recta BC in puncto E quoniam ibi bifariam dividitur [4]), itaque fecundum ea quae in primo libro [5]) oftenfa funt, erit abfciffor coni BDC aequalis cono NDM quare et partes coni ABC, ANMC erunt aequales, pars autem ANMC manifeftò major eft cylindro AK; itaque minor eft exceffus cylindri AG fuprà partem coni ABC quam fuprà cylindrum AK. at Cylindro AG aequalis eft cuneus cylindri ABC, ergo minor quoque eft exceffus cunei ABC fupra coni partem ABC quam cylindri AG fupra cylindrum AK, ideoque et minor data folida magnitudine. quod erat oftend.

---

[3]) Il y quelque confusion dans cette partie de la démonstration. En effet, pour que l'hyperbole en question touche la ligne NM au point L, on doit construire cette ligne NM parallèle à la base AC de telle manière qu'on ait $NL^2 = LM^2 = FE \times EK$; mais alors le point L se trouvera à gauche de la ligne BC. D'ailleurs la démonstration reste valide, puisqu'elle exige seulement que la ligne NM se trouve au-dessus de la ligne FK, ce qui a lieu aussi bien avec la ligne NM dont nous venons d'indiquer la construction qu'avec la ligne NM du texte.

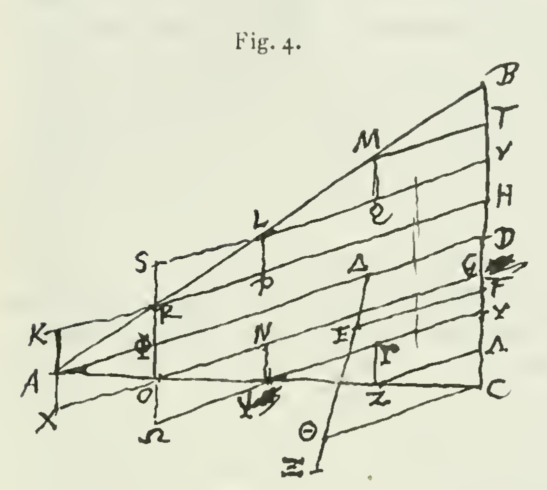
[4]) On lit encore en marge: „9. 2 con." Voir à la page 46 verso des „Coniques" d'Apollonius (éd. Comm., citée p. 6 du Tome I, note 4): „Si recta linea asymptotis occurrens ab hyperbola bifariam secetur; in uno tantum puncto sectionem contingit."

[5]) Voir le „Lemma 2" à la page 113 du Tome présent.

Pr. 4. *Cunei Cylindrici centrum gravitatis eſt in linea rectâ quae à contactu baſium ad medium latus ducitur.* [6])

Eſto Cuneus Cylindricus plano ABC in aequales partes et ſimiles ſectus cujus cunei baſis circularis circa diametrum AC, elliptica vero circa diametrum AB; ab harum contactu A ducatur AD ad medium latus BC. dico in linea AD reperiri centrum grav. cunei ABC. Si enim non eſt in linea AD, ſit alibi in plano ABC nimirum in E; (nam quod ſit in plano ABC manifeſtum eſt quum ab hoc cuneus in partes duas oppoſitas aequales et ſimiles dividatur) et ducatur EF lineae AD aequidiſtans. Porro ſecetur cuneus plano ſecundum AD erecto ſuper planum ABC, (quae ſectio ellipſis erit) et lineae DB, DC eousque continuè biſariam ſecentur, donec habeatur tandem linea minor quam DF, DH, et à ſectionis punctis plana exeant HR, VL &c. plano ſecundum AD aequidiſtantia inde autem ubi haec ellipſi AB occurrunt et circulo AC, ducantur alia plana MQ, LP &c. aequidiſtantia plano quod cuneum ſecundum latus BC contingeret, quae quidem omnia rectangula efficere conſtat. Et erit hac ratione cuneo inſcripta quaedam figura ex fruſtorum cylindri ſegmentis conſtans, et quodque ipſa reſiduum relinquit erit aequale fruſtro cylindrico DX. quod ut apertum fiat compleantur fruſtorum ſegmenta quaecunque inter plana VL, YΨ medias baſes AB et AC ſecantia continentur, ut fiant fruſtra integra DK, DX, ſegmenta verò fruſtorum SH, OY aequalia ſegmentis RD, ΦG. Certum eſt itaque partem ſolidam AKR nihil prorſus differre a parte BTM neque partem RSL à parte LQM, quum iisdem ſuperficiebus ſimiliter etiam ſed ſubcontrarie poſitis contineantur. ideoque omnes partes triangulares AΦR, RPL, LQM, MTB aequari partibus KΦ et SP; eâdem quoque ratione triangulares AΦO, ONΨ, ΨΓZ, ZΛC, aequantur partibus XΦ, ΩN; atqui haſce ipſas XΦ et ΩN manifeſtum eſt aequari dimidio fruſtri XD ſicut et KΦ, SP; igitur totum reſiduum ex partibus triangularibus conſtans. aequale eſt fruſto XD. Porro autem in Figurâ cuneo inſcriptâ binae quaeque partes ſibi invicem reſpondent, ut qualis fruſti cylindrici pars eſt MV talis et ΓΛ eadem magnitudine et figura et qualis LH talis quoque NY atque ita de caeteris, et omnes à

Fig. 4.



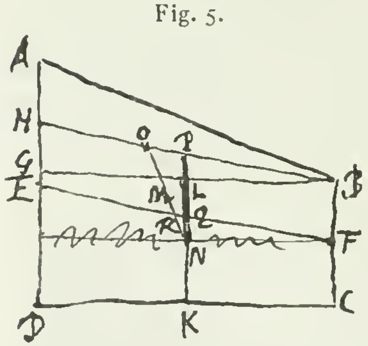
[6]) Comparez le „Theorema I" du „Liber III", p. 159 du Tome présent.

plano ABC dividuntur in duas partes oppositas, inter se similes et aequales, unde manifestum est omnium quoque centra gravitatis in eodem plano ABC reperiri; itaque unius partis centr. gr. erit in parallelog. MV, et partis oppositae in parallelogr. ΓΛ, verum et similiter posita erunt centra haec in dictis parallelogrammis, eoque aequaliter distabunt à lineâ AD, igitur quae utrumque centrum conjunget à linea AD bifariam dividetur sed ubi illa bifariam dividetur ibi erit compositae magnitudinis ex duabus aequalibus centrum gravitatis, ergo compos. magn.is ex partibus solidis MV et ΓΛ centr. gr. erit in linea AD; eadem ratione mag.is comp.ae ex partibus LH, NY erit centr. gr. in linea AD, ut et compositae ex partibus RD, ΦG itaque totius figurae cuneo inscriptae centr. grav. est in linea AD; Sit hoc △ et jungatur △E, et producatur et ducatur CΘ ipsi lineae DA aequid. quae proinde cadet extra cuneum.

Quia igitur cuneus ABC aequalis est cylindro habenti basin circ. AC et altitudinem CD[7]); frustum verò DX aequ. cylindro eandem basin AC habenti et altit.m DG, sequitur cuneum ABC esse ad frustum DX ut CD ad DG. DF autem major est quam DG; igitur CD ad DF vel Θ△ ad △E minorem habet rationem quam cuneus ad frustum DX sive residuum ex partibus triangularibus constans, quare et dividendo minor erit ratio ΘE ad E△ quam figurae cuneo inscriptae ad dictum residuum; sit itaque ΞE ad E△ sicut inscripta figura est ad idem residuum. Ergo quum E positum fuerit c. gr. totius cunei, △ autem sit c. gr. figurae inscriptae, erit residui c. gr. punctum Ξ, quod esse nequit nam plano quod per Ξ agetur ellipsi circa AD aequidistans in eandem partem erunt omnes partes triang.es e quibus residuum componitur.

Pr. 5. *Portionis Cylindri centr. gr. est in linea recta quae à medio majoris lateris ducitur ad medium minoris.* [8])

Fig. 5.



Esto portio cylindr. cujus latera AD maius et BC minus, secundum quae secta intelligatur plano ABCD, ipsa vero latera bifariam secentur et sectionum puncta jungantur linea EF, dico in hâc reperiri c. gr. Portionis propositae. Sit enim si potest extra lineam EF in M (erit autem centrum M in plano ABCD quum ab hoc portio dividatur in duas partes oppositas, similes et aequales) et dividatur portio plano secundum GB quod basi DC aequidistet in cuneum AGB et cylindrum GC; Porro ducatur linea BH ad mediam AG, sitque cylindri GC axis LK, in

[7]) Comparez le dernier des „Manifesta" du „Liber III," p. 159 du Tome présent.

[8]) Comparez le „Theorema 2" du „Liber III," p. 160 du Tome présent.

cujus medio ejufdem centr. gr. N. Jungatur NM et producatur ufque dum occurrat lineae BH in O, eòdem que producatur axis KL qui ei occurat in P, lineam autem EF fecet NO in R, et KP in Q.

Quia igitur M eft c. gr. totius portionis, N vero cylindri GC, erit partis reliquae nimirum cunei AGB c. gr. in producta NM, fed idem quoque in linea BH reperiri oftenfum eft [9]), itaque neceffario cunei ABC c. gr. eft punctum O, eritque reciprocè MN ad MO, ficut cuneus AGB ad cylindr. GC. Porro quum AE fit aequalis dimidiae AD, id eft aequalis dimidiae AG cum dimidia GD, erit ablata AH reliqua HE aequalis dimidiae GD id eft BF; igitur parallelae funt HB, EF quare erit NR ad RO, ficut NQ ad QP id eft PL ad LN; ut autem PL ad LN ita eft HG ad GD, (quoniam utraque utriufque eft dupla), et ut HG ad GD ita eft cuneus AGC ad cylindrum GC; ergo ficut cuneus AGB ad cylind. GC ita eft NR ad RO; fed fic etiam effe NM ad MO oftenfum fuit; itaque idem erit punctum R et M, quod effe non poteft, quoniam M ponebatur extra lineam EF in qua eft punctum R. Apparet igitur centr. gr. portionis ABCD non poffe ftatui extra lineam EF, quamobrem id in ipfa reperiri neceffe eft. q. er. dem.

Fig. 6.

Pr. 6. *Cunei Cylindrici centr. gr. lineam rectam quae à contactu bafium ad medium latus oppofitum ducitur ita dividit ut pars verfus contactum fit ad reliquam ut quinque ad tria* [10]).

Efto cuneus Cylindricus ABC cujus bafes circulus circa diametrum AC et ellipfis circa diam. BC, ab harum contactu C ducta fit CD ad medium latus AB, eaque dividatur in puncto E ut fit CE ad ED ficut quinque ad tria. dico punctum E effe cunei gravitatis centrum. Si enim fieri poteft fit alibi in linea DC et primò magis verfus contactum bafium in F. et quam rationem habet CE ad EF eam habeat cuneus ABC ad magnitudinem quandam solidam G. Tum fuper bafe AC conftituatur conus fcalenus AHC, cujus vertex H fit in producto latere AB, ita ut pars coni intra cuneum ABC comprehenfa ab eodem cuneo deficiat folido mi-

[9]) Voir la „Pr. 4" qui précède.
[10]) Comparez le „Theorema III" du „Liber III." p. 160 du Tome présent.

nore quam sit G. [11]) Et dividantur AC et BC bifariam in puntis K et L, quae jungantur, et ducantur KH, quae erit axis coni AHC, et LH axis abscissoris coni BHC, hi rursus dividantur in punctis M et N, ita ut HM sit tripla MK, et HN tripla NL; eritque hac ratione M c. gr. coni AHC, et N abscissoris BHC. Jungatur NM, et producatur; eâque transibit per punctum E, nam quum KL utràque AC et BC bifariam dividat, sequitur eam aequidistare lateri AB, ipsi autem LK aquidistat NM quoniam duas HK, HL, in eandem rationem dividit, itaque et NM lateri AB aequidistat ac proinde producta secabit AK in O puncto in eandem rationem ac HK; est igitur AO tripla OK, et consequenter CO ad OA vel etiam CE ad ED ut quinque ad tria in hanc autem proportionem linea DC à puncto E divisa fuerat, itaque constat NM productam transire per E punctum. Porro quum M sit totius coni centr. gr., N autem abscissoris BHC, necesse etiam est partis coni reliquae ABC centr. gr. reperiri in producta NM: sit hoc P, et jungatur PF, eaque producatur et occurrat ei CQ parallela lateri AB. Quoniam igitur cuneus cylindricus ad excessum quo ipse superat coni partem ABC, majorem habet rationem quàm ad magnitudinem G, ad quam eam habet quam CE ad EF, etiam dividendo coni pars ABC majorem habebit rationem ad dictum excessum quam CF ad FE vel quam QF ad FP; habeat itaque RF ad FP eam rationem quam pars coni ABC ad excessum quo superatur ipsa à cuneo cylindrico, ergo quum F positum fuerit centr. gr. totius cunei, P, autem c. gr. partis coni quae cuneo comprehensa est, erit c. gr. magnitudinis reliquae punctum R quod esse non potest, nam si planum per R ducatur faciens angulos rectos cum plano per ABC, tota magnitudo reliqua. qua coni pars à cuneo ipsam comprehendente superatur erit ab una eius plani parte. Non est igitur Cunei ABC c. gr. magis versus contactum. Verum neque esse ab altera parte puncti E simili ratione ostendi poterit, itaque est ipsum punctum E. q. er. dem. [12])

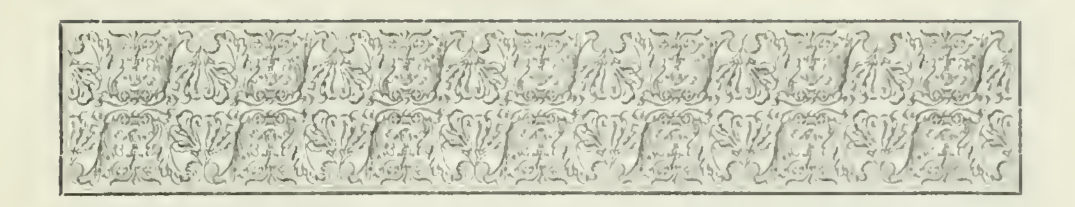
---

[11]) Voir la „Pr. 3."

[12]) L'Appendice finit ici sans traiter le cas du tronc de cylindre droit; mais on doit remarquer que la démonstration du „Theorema 4" qui se rapporte au centre de gravité d'un tel tronc et qu'on trouve p. 161 du Tome présent, est indépendante de la méthode de Cavalieri. Ainsi le but que Huygens s'était évidemment proposé, c'est-à-dire: de remplacer les démonstrations du „Liber III" qui dépendent de cette méthode, par d'autres, qui lui semblaient plus rigoureuses, a été atteint dans l'Appendice présent.

En outre du texte que nous avons reproduit ici, la même feuille contient encore le théorème que voici: „Si conus secetur plano basi parallelo, idemque secetur alio plano transverso quod circulum ex priori sectione factum et basin coni contingat; fiet abscissor coni medius proportione inter conum propositum et eum qui abscissus est." Après quoi suivent quelques phrases, biffées depuis, qui constituent le commencement de la démonstration de ce théorème, lequel d'ailleurs se déduit facilement du „Lemma 2" de la page 113.

TRAVAUX MATHÉMATIQUES DIVERS DE 1650.
PROBLÈMES PLANS ET LIEUX PLANS.



Avertissement.

Les pièces, qui suivent, ont été empruntées, les deux premières au „boeckje" [livret] dont nous avons parlé à la page 4 du Tome présent, les autres à la partie intermédiaire, écrite de la main de Huygens, du manuscrit N°. 12 que nous avons décrit dans la note 1 page 7 du même Tome.

A l'exception de trois d'entre elles, [1]) qui s'occupent d'autre chose, elles ont cela de commun qu'elles traitent de problèmes „plans," c'est-à-dire, de problèmes résolubles par la règle et le compas, ou de lieux „plans," [2]) c'est-à-dire de lieux géométriques qui sont des droites ou des cercles. De plus, hormis un seul dont nous n'avons pas su découvrir l'origine [3]), elles ont toutes été inspirées directement ou indirectement par les „Mathematicae collectiones" de Pappus l'Alexandrin [4]); les problèmes [5]) par l'aperçu de Pappus des „inclinaisons"; les lieux [6]) par l'aperçu des „lieux plans" d'Apollonius.

[1]) Les pièces N°. I, N°. II et N°. XIV; pp. 216, 217 et 259.

[2]) Dans l'aperçu des „lieux plans" d'Apollonius (traduction de Commandin, p. 162 recto) Pappus divise les lieux géométriques en „plani loci........ quicunque sunt rectae lineae, vel circuli. Solidi loci quicumque sunt conorum sectiones, parabolae, vel ellipses, vel hyperbolae. lineares loci quicumque lineae sunt, neque rectae. neque circuli, neque aliqua dictarum coni sectionum."

[3]) Le N°. III; p. 219.

[4]) Voir la note 3 à la page 259 du T. II. On y trouve mentionnée la traduction latine de Commandin. Que c'était en effet cette traduction dont se servirent van Schooten et Huygens, cela est prouvé par la phrase: „quae legitur in fine paginae 162" de la Lettre N°. 221, p. 327 du Tome I.

[5]) Les N°. IV, VIII et XIII. Le N°. IV est un cas particulier du N°. VIII. Il a été traité par Pappus dans la partie de son ouvrage qui était destiné à faciliter l'étude des „inclinaisons" d'Apollonius.

[6]) Les N°. V, VI, VII, IX, X, XI, XII, XV, XVI, XVII, XVIII et XIX, qu'on retrouve

En effet, ces „lieux plans" préoccupaient beaucoup les ſavants de l'époque. Nous avons déjà remarqué, dans la note 23 de la page 15 du Tome préſent, que tous les problèmes dont van Schooten ſe ſervit pour expliquer à Huygens, ſon élève, la géométrie nouvelle de Deſcartes, étaient empruntés à ces „lieux plans." Dès lors il ne délaiſſa plus l'étude de ces lieux. Il s'en entretenait verbalement et par écrit avec Huygens. [7]) Enfin en 1652 [8]) il lui envoya le manuſcrit de ſes „Apollonii Pergaei loca plana reſtituta" [9]) pour en avoir ſon avis; [10]) mais il avait été précédé dans cette voie par Fermat qui acheva en 1636 ſes „Apollonii Pergaei libri duo de locis planis reſtituti." [11])

Certainement aucune de ces pièces de 1650 ne s'élève au niveau de l'ouvrage „De iis quae liquido ſupernatant" de la même année, ni même à celui des meilleures pièces des „Travaux de jeuneſſe." Elles font preſſentir déjà, à ce qu'il nous ſemble, que Huygens ne ſera pas, dans le domaine de l'analyſe algébrique et de la théorie des nombres, l'innovateur qu'il ſe montre dès l'abord dans celui de la géométrie pure, de la dynamique et ſurtout de la phyſique mathématique. [12])

Toutefois on pourra apprécier dans la pièce N°. III la ſûreté avec laquelle le jeune Huygens, dans ſa première ſolution de ce problème aſſez intéreſſant, ſait choiſir la racine de l'équation quadratique qui amènera la ſolution qui ſatiſfait à toutes les exigences du problème; quoique dans l'abſence d'une analyſe nous ne connaiſſions pas les conſidérations qui l'ont guidé.

Et la pièce N°. IV dont les différentes parties ont été racommodées imparfaite-

dans les „lieux plans" ou qui portent tout à fait le même caractère; et peut-être d'autres solutions ne nous sont pas parvenues. Ainsi Huygens pouvait-il écrire à Gregorius à St. Vincentio: „Prostat apud me alia insignis inventio unius è locis planis Apollonij quos Pappus libro 7 refert, ego vero omnes pene resolvi." Voir la Lettre N°. 122 du 15 mars 1652 à la page 175 du Tome I.

7) Voir les Lettres N°. 93 et 94, p. 141—145 du Tome I, du 13 mai et du 30 juin 1651.

8) Voir la Lettre N°. 128 du 28 juillet 1652, p. 183—184 du Tome I.

9) Ils furent publiés en 1657 dans l'ouvrage cité dans la note 3, p. 184 du T. I.

10) Voir, sur ce jugement, la Lettre N°. 129 du 13 août 1652, p. 184 du T. I.

11) Voir sa lettre à Mersenne du 26 avril 1636, Tome II, p. 5 de l'édition des „Œuvres de Fermat" de Tannery et Henry. La publication n'eut lieu qu'en 1697 dans les „Opera varia", ouvrage cité dans la note 1, p. 326 de notre T. I; mais des copies en étaient répandues depuis longtemps.

Une telle copie avait été envoyée par Mersenne à Huygens père, qui la retrouva en 1655 et la montra à Christiaan. Celui-ci en avertit van Schooten qui n'en voulait pas prendre connaissance avant la publication de sa propre „restitution." Voir les Lettres N°. 221, du 26 mai 1655, p. 326 du T. I; N°. 222, pag. 327 du même Tome et N°. 735, p. 57 du T. III.

12) Comparez la note 4, p. 230 et la note 6, p. 256 du Tome présent; comme aussi la pièce N°. XIV, p. 259.

ment nous donne un coup d'œil ſur ſa manière de travailler, qui le fait revenir pluſieurs fois ſur le même problème.

Évidemment le problème de la pièce N°. V, plus qu'aucun des autres, a continué à intéreſſer Huygens. Dans cette pièce il démontre que le centre du cercle d'Apollonius, lieu des points pour leſquels la ſomme des carrés des diſtances à des points donnés a une valeur donnée, n'eſt autre que le centre de gravité de ces points et il indique la propriété minimale de ce centre qui en découle. Sur ces réſultats il écrit en 1652 à Gregorius a St. Vincentio [13]) et encore en 1657 à de de Sluſe. [14]) Enfin en 1673 il traite le même problème dans la Prop. XII de la „Pars quarta" de l'„Horologium oſcillatorium." [15])

De même il eſt revenu plus d'une fois ſur les problèmes N°. IV et VIII pour en publier enfin d'autres ſolutions dans les „Problematum quorundam illuſtrium conſtructiones" [16]) de 1654.

Nous ſignalons encore les N°. II, X et XIII, et nous renvoyons, pour l'interprétation que Huygens applique aux énoncés parfois bien obſcurs des „lieux plans" d'Apollonius, aux notes 2 des N°. V, VII, XII, XVI et XIX. [17])

[13]) Voir la Lettre N°. 122 à la page 175 pu T. I.

[14]) Voir les Lettres N°. 395, à la page 38 du T. II et N°. 397 aux pages 40 et 41 du même Tome.

[15]) L'ouvrage cité dans la note 1, p. 257 du T. VII.

[16]) L'ouvrage cité dans la note 1, p. 287 du T. I.

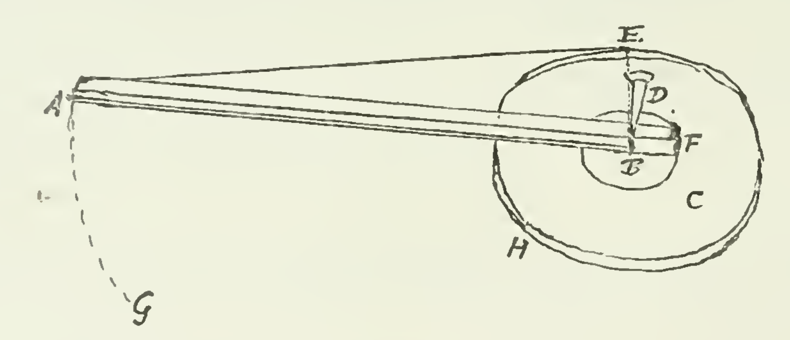
[17]) On peut consulter sur les diverses interprétations de la traduction de Commandin et du texte grec de l'aperçu de Pappus des lieux plans d'Apollonius les pp. 661—669 du Vol. 2 de l'ouvrage suivant: „Pappi Alexandrini Collectionis quae supersunt e libris manu scriptis edidit latina interpretatione et commentariis instruxit Fridericus Hultsch. Berolini. Apud Weidmannos MDCCCLXXVII." 3 Vol.

I.[1]

1650.

Inſtrumentum deſcribendae helici fabricari ejusmodi poteſt; Cylindrus exiguae altitudinis in quo C, quieſcit et plano affixus eſt. Cylindro minori in quo B, affixa eſt regula AF, adeo ut ſimul convertantur. EAB eſt chorda. A trochleola. DB eſt ſtylus. chorda EA tangit circumferentiam cylindri C in E, atque ibidem firmata eſt: et altera ejus extremitas affixa ſtylo BD.

Mota igitur regula AB ſimulque cijlindrulo BF, qui regulae adheret, et manente immoto cylindro C, circumvolvetur chorda EAB circumferentiae EH;



atque ita fiet ut stijlus DB moveatur aequabili motu verſus A, dum A movetur verſus G: quare cuſpis B deſcribet helicem.

Videndum autem eſt quo potiſſimum modo difficultatibus obviam iri poſſit, quas exhibebit cylindrus uterque, et puto non difficile fore. Notandum quod regula BA, longior eſſe debeat circumferentia EH. Item quod ſi majorem minoremve helicem deſcribere velimus, adhibendus ſit alius cylindrus loco cylindri C.

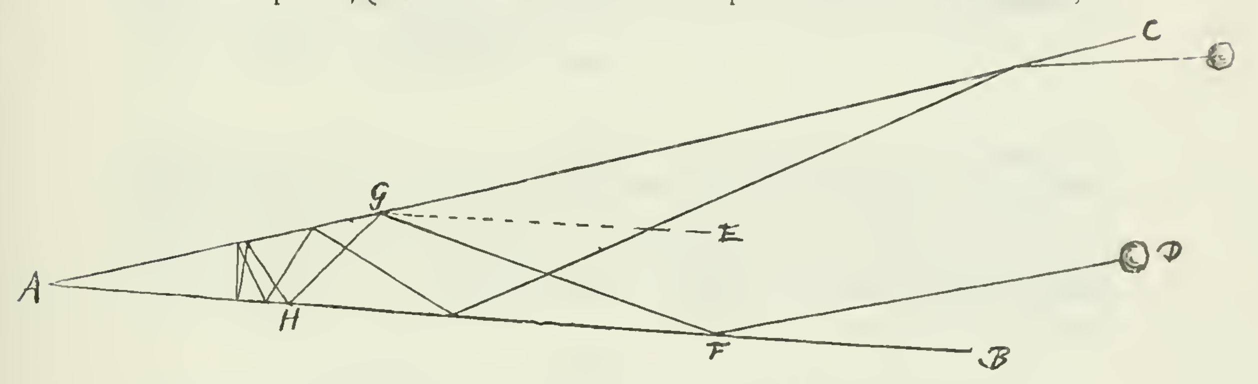
Denique quod non poſſit hoc inſtrumento datae magnitudinis helix deſcribi, niſi cognita ratione diametri circuli ad ſuam circumſer.

[1]) Description mécanique de la spirale d'Archimède. La pièce se trouve p. 82 du manuscrit N°. 17 mentionné à la page 4 du Tome présent.

II.[1]

1650.

Esto angulus quilibet CAB, atque intelligantur secundum lineas CA, AB erecta plana super hanc superficiem ad angulos rectos consistentia. Impelli deinde sphaeram D, in alterutrum planorum sicut hic primum in punctum F quod ad lubitum sumi potest; (manifestum autem est inde repercussum tendere versus G, ita



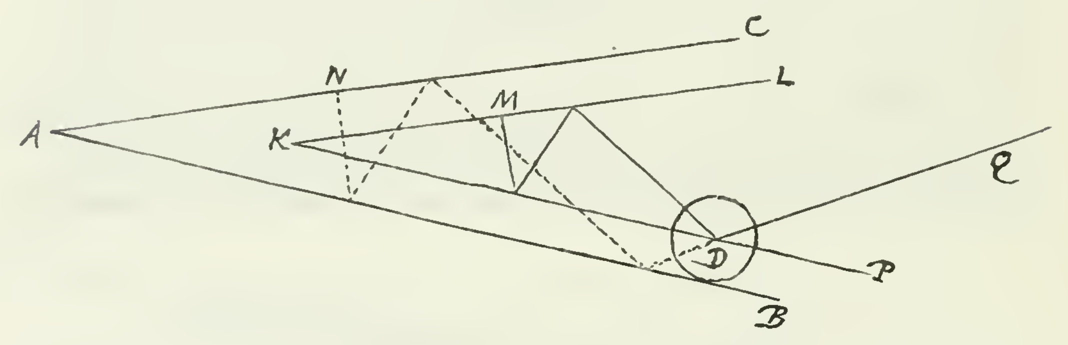
ut angulus DFB, angulo GFA aequetur,) dico sphaeram D post aliquot repercussiones reversuram et in contrariam partem latum iri.

Quomodocunque autem impulsa fuerit versus anguli verticem, nunquam pluribus vicibus repercutietur intra angulum quam quot vicibus angulus CAB continetur duobus angulis rectis, pro unâ etiam supputando si quid supererit, angulo CAB fortè duos rectos non accurate metiente. Ita, propositus angulus BAC quia fermè undecies continetur duobus rectis, sphaera D non potest pluribus quam

[1]) Détermination du nombre maximum des répercussions élastiques d'une sphère contre deux parois qui se rencontrent sous un angle donné; la sphère est sensée se mouvoir dans un plan perpendiculaire à l'arête formée par les parois. La pièce se trouve pp. 83—85 du manuscrit N°. 17, mentionné à la page 4 du Tome présent.

undecim vicibus contra hunc angulum repercuti: Idque facile fupputatur, ex eo quod anguli fecundum quos fphaera occurrit et refilit à planis confequenter augentur angulo CAB: [2]) apparet enim ductâ GE parallela AB, angulum CGF aequari duobus DFB et CAB. fimiliter quoque angulus GHF aequatur duobus CGF et CAB atque ita porro.

Quo major est fphaera D eo minus appropinquabit vertici A, ductis enim DK, KL parallelis BA, AC, ita ut ab his diftent latitudine femidiametri fphaerae D, manifeftum fit fphaeram repercuti fimul ac ejus centrum contigerit lineas DK, KL.



Et propterea eam non perventuram ultra M, quum tamen radius opticus perventurus fit ufque in N. Anguli tamen et numerus repercuffionum utrobique idem eft.

Si autem angulus BAC aliquoties fumptus una cum angulo primi occurfus QDP fecerit angulum rectum, tum fphaera per eafdem rectas quibus perrexit revertetur ficuti hoc cafu accidere videmus, ubi triplum anguli BAC additum angulo QDP aequat rectum.

---

[2]) C'est-à-dire en y joignant la considération que la sphère cessera d'atteindre la paroi opposée aussitôt qu'on aura $\alpha + (n-1)\,\varepsilon \geqq 180° - \varepsilon$, où α représente l'angle DFB, ε celui formé par les parois et n le nombre des répercussions. On pourrait ajouter que dans le cas $\alpha < \varepsilon$, qui se présentera toujours quand les parois sont indéfiniment prolongées et que la sphère arrive de l'infini, alors le nombre des répercussions sera égal au nombre maximum mentionné ou y sera inférieur d'une unité, selon que l'on a $\alpha \lesseqgtr \delta$, où δ désigne le reste de la division de 180° par ε.

III.[1])

1650, 1656, [1668].

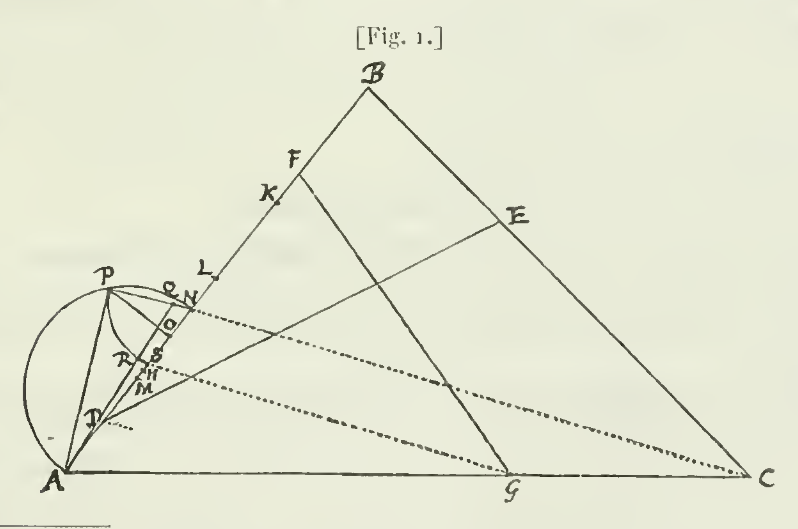
Problema. 1650.

Triang. ABC, sectus utcunque lineâ DE, dividendus est aliâ lineâ, FG, ita ut utraque pars, DBE et ADEC bifariam dividatur. [2])

Siquidem linea DE, vel ex uno angulorum ducta sit, vel uni laterum parallela, facilis erit constructio problematis. Verùm hic ponitur, ED, si versus D producatur concursuram cum producto latere CA.

Sit duarum AB, DB, tertia proportionalis HB, et trium CB, EB, DB, quarta

[Fig. 1.]



[1]) La pièce a été empruntée, quant aux parties datées 1650 et 1656 au manuscrit mentionné dans la note 1 de la page 7 du Tome présent. Elle s'y trouve écrite sur une feuille attachée avec de la cire à une page vide. La dernière partie est extraite du livre des Adversaria D. Le lieu, où elle s'y trouve, indique la date de 1668.

[2]) Ce problème, qui a occupé Huygens à trois reprises, se réduit, comme il est aisé de le voir, à

prop.lis BK. ſit L medium AB, et ponatur LM aequalis $\frac{1}{4}$ totius HBK: [3]) et advertatur num BM ſit major vel minor vel aequalis ipſi BD. et ſiquidem minor eſt, ut hìc, ſumatur quadruplum differentiae MD idque ſit AN. et ſit O medium AK. et inveniatur inter AO, AN, med. prop. AP. et quadrato AP addatur qu. AD, ponendo PQ ∞ AD, et jungendo AQ. Ab AQ auferatur QP, et reſiduo AR ſit aequalis AS. jungatur jam NC, eique parallela ducatur SG. eritque inventum punctum G, è quo triangulum ABC oportebit bifariam dividere, rectâ GF, quod factu facile eſt. et erit conſtructio perfecta. [4])

Si verò BM major fuiſſet quam BD, debuiſſet quadrat. AP ſubſtrahi à qu. AD, [5]) (quum prius haec addita fuerint) et radix reſidui ſubſtrahi ex DA. atque à termino reliquae partis, duci linea parallela ipſi NC; eaque rurſus oſtendiſſet punctum G. [6]).

celui de mener les tangentes communes à deux hyperboles, enveloppes de droites qui avec deux droites fixes déterminent des triangles dont l'aire est donnée. Et la figure 4 démontre que ce point de vue n'a pas échappé à Huygens.

Or, comme l'asymptote commune, AB, compte pour deux de ces tangentes, il en reste deux à déterminer. Le problème est donc un „problème plan," menant à une équation quadratique.

[3]) C'est-à-dire: LM $= \frac{1}{4}$(HB + BK).

[4]) Posons AB $= a$. BC $= b$, AC $= c$, BD $= d$, BE $= e$, et ensuite, d'après les constructions indiquées, AN $= 4\,(\text{BD} - \text{BM}) = 4d - 2a - \frac{d^2}{a} - \frac{de}{b} = f$, AO $= \frac{1}{2}a - \frac{de}{2b} = g$. On a alors AP$^2 = fg$, AQ$^2 = fg + (a-d)^2$, AS $= \sqrt{fg + (a-d)^2} - (a-d)$, et enfin AG $=$ AS $\times$ AC : AN $= \frac{\sqrt{fg + (a-d)^2} - (a-d)}{f} \cdot c$; d'où il s'ensuit que AG représente la racine positive de l'équation quadratique:

$$fx^2 + 2\,(a-d)\,c\,x - c^2 g = 0,$$

équation dont nous avons vérifié l'exactitude en suppléant à l'analyse de Huygens, qui manque, par une autre qu'il n'est pas difficile de deviner.

Or, nous montrerons dans la note 11 que le problème, dans sa conception la plus stricte, admet toujours une solution unique qui doit être identique ici avec celle indiquée par Huygens.

[5]) Huygens semble négliger ici le cas où AP $>$ AD; mais ce cas mènerait à des solutions imaginaires, qui ne peuvent pas se présenter, comme nous le montrerons dans la note 11.

[6]) Posons dans ce cas: AN $= 4\,(\text{BM} - \text{BD}) = 2a + \frac{d^2}{a} + \frac{de}{b} - 4d = f'$. On trouve alors, par les constructions indiquées, AP$^2 = f'g$, AQ$^2 = (d-a)^2 - f'g$, AS $= a - d - \sqrt{(a-d)^2 - f'g}$, et ensuite AG $= \frac{a - d - \sqrt{(a-d)^2 - f'g}}{f'}\,c$.

Ainsi AG représente la racine la plus petite de l'équation quadratique:

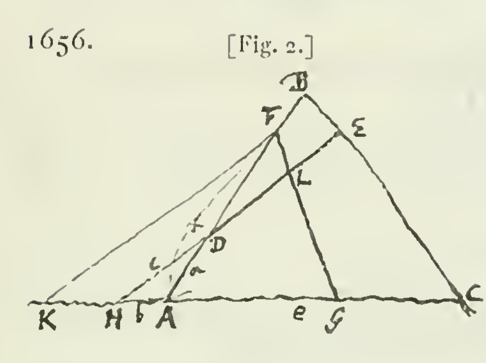
$$f'x^2 - 2\,(a-d)\,c\,x + c^2 g = 0,$$

mais, puisqu'on a $f' = -f$, cette équation est identique avec celle de la note 4. Et il est

Quod si BM ipsi BD aequalis fuisset, tum omissa omni constructione, fuisset AG quarta proport. trium linearum, quam prima AD [7]), secunda AB, tertia $\frac{1}{4}$ AC.

Sit AD ∞ a; AH ∞ b; HD ∞ c; AB ∞ d; AC ∞ e; DE ∞ f; FA ∞ x.

1656. [Fig. 2.]



Ergo AG ∞ $\frac{\frac{1}{2}de}{x}$; FD ∞ $x-a$.

$\square$ BDE $df-af$; DL $\frac{df-af}{2x-2a}$

DA (a) ad AH (b) ut FA (x) ad AK $\left(\frac{bx}{a}\right)$

a ad c ut x ad $\frac{cx}{a}$ KF

GK $\left(\frac{bx}{a}+\frac{1}{2}\frac{de}{x}\right)$ ad KF $\left(\frac{cx}{a}\right)$

ut GH $\left(\frac{1}{2}\frac{de}{x}+b\right)$ ad

HL $\left(\frac{\frac{1}{2}decx+cbxx}{bxx+\frac{1}{2}dea}\right)$ s[ubstr.] HD ∞ c

DL $\frac{df-af}{2x-2a}$ ∞ DL $\frac{\frac{1}{2}decx-\frac{1}{2}deac}{bxx+\frac{1}{2}dea}$

$$xx \infty \frac{4\,acdex-aadef-2\,decaa+ddeaf}{-2\,bdf+2\,abf+2\,dec}$$

sit $f+2c \infty h$. EHD
$d-a \infty g$. BD

$$xx \infty \frac{2\,acx-\frac{1}{2}\,aah+\frac{1}{2}\,adf}{c-\frac{bfg}{de}}$$

évident que la racine la plus petite, choisie par Huygens, correspond à la plus grande racine de l'équation qui donnerait la valeur de AF, puisque l'aire AFG est donnée. Or, cela justifie le choix de Huygens, car nous montrerons dans la note 11 que c'est cette racine qui amène la seule solution qui satisfait à toutes les exigences du problème.

7) Lisez AK. En effet, alors $f=0$ et l'équation quadratique de la note 4 nous donne: AG $=x=$ $=\frac{cg}{2(a-d)}=\frac{AC \times AO}{2\,AD}=\frac{AC \times AK}{4\,AD}$.

$$h - 2c \infty f$$
$$a \infty d - g$$
Ergo
$$-\,2\,ac + ah \infty df - gf$$
$$ah - df \infty 2\,ac - gf$$

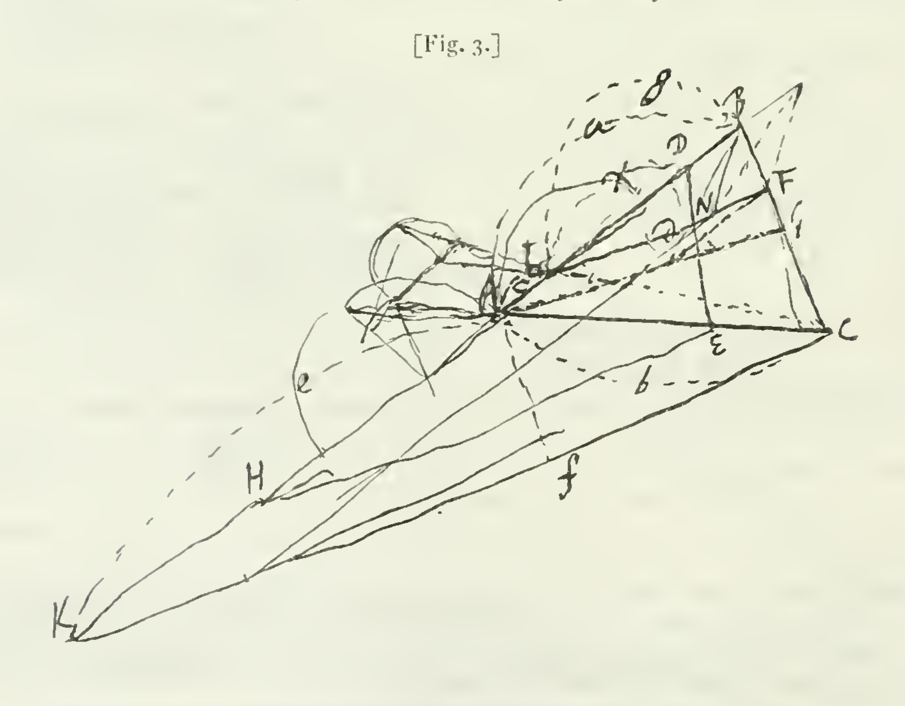
$$xx \infty \frac{2\,acx - aac + \frac{1}{2}\,agf}{c - \frac{bfg}{de}}$$

Hinc alia conſtr. à ſuperiori diverſa. Illa autem alio calculo fuit inventa. alia optima conſtructio in libro adverſar. D [8])

Problema.

Triangulum ABC diviſum utcunque recta LF, dividere iterum recta DE, ita ut utraque pars LBF, ALFC bifariam ſecetur.

[Fig. 3.]



---

[8]) Voir la „Constructio problematis" qui va suivre. On la trouve à la page 12 du Livre D.

AB ∞ a; AC ∞ b; AL ∞ c; AD ∞ x; LF ∞ d; AK ∞ e; KC ∞ f; BL ∞ g.[9])

$$\text{AE} \infty \frac{ab}{2x}.$$

$$\text{AC}\ (b)\ \text{ad AK}\ (e)\ \text{ut EA} \left(\frac{ab}{2x}\right) \text{ad AH} \left(\frac{ea}{2x}\right)$$

$$b \text{ ad } f \text{ ut } \frac{ab}{2x} \text{ ad } \frac{fa}{2x} \text{ EH.}$$

$$\text{DH} \left(x + \frac{ea}{2x}\right) \text{ad HE} \left(\frac{fa}{2x}\right) \text{ ut DL } (x - c) \text{ ad LN} \left(\frac{fax - fac}{2xx + ae}\right).$$

[multipl.] LD $(x - c)$

$$\text{BL} \infty a - c \infty g;\ \text{LF} \infty d;\ \tfrac{1}{2} dg \infty \frac{faxx - 2facx + faa}{2xx + ae}$$

$$dgxx + \tfrac{1}{2} dgae \infty faxx - 2facx + facc.$$

$$\frac{2facx + \frac{1}{2}dgae - facc}{fa - dg} \infty xx \text{ bon}$$

$$\frac{dg}{f} \infty i \qquad \frac{2acx - acc + \frac{1}{2}iae}{a - i} \infty xx$$

$$\frac{ac}{a - i} + \sqrt{\frac{aicc}{\text{q.}\ a - i} + \frac{\frac{1}{2}aie}{a - i}} \infty x$$

CONSTRUCTIO PROBLEMATIS.

Sit duabus KB, LB [Fig. 4] tertia prop. IB.[10]). Et ut AI ad IB ita fit AL ad LV, et ita AB ad X; et rurfus duabus IA, LA tertia proport. MA; divifaque

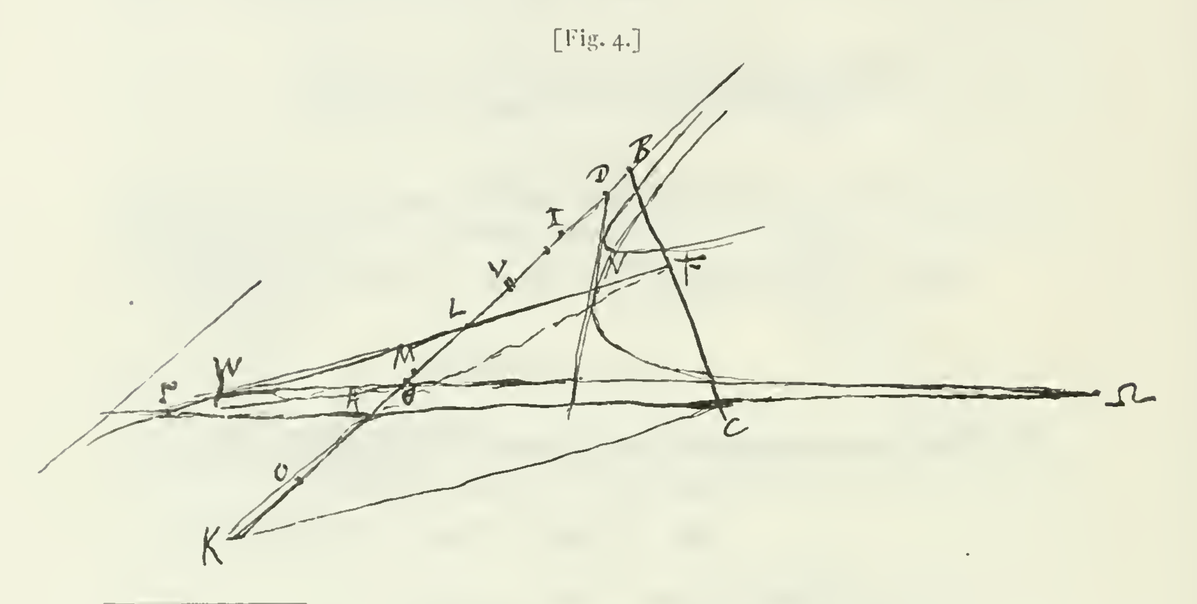
[9]) On remarquera que les données sont surabondantes. Outre la relation evidente $a = c + g$, on a encore, à cause des triangles semblables BLF et BKC: $fg = d(a + e)$; relation qu'on trouve mentionnée dans le manuscrit.

[10]) On a donc IB $= \frac{g^2}{a+e}$; c'est-à-dire, à cause de la relation de la note précédente, IB $= \frac{dg}{f} = i$.

bifariam AK in O inveniatur quae poffit ▭ sub MO et X; eique aequalis ponatur VD. Erit D punctum quaefitum. [11]).

Si cc major quam $\frac{1}{2}\,ie$, hoc eft fi qu. AL majus ▭° AO, IB erunt duae verae

[Fig. 4.]



[11]) On a, en effet, par les constructions du texte: $LV = \frac{ci}{a-i}$; $X = \frac{ai}{a-i}$, $MA = \frac{c^2}{a-i}$; $AO = \frac{1}{2}\,e$; $MO = \frac{c^2 + \frac{1}{2}\,ac - \frac{1}{2}\,ie}{a-i}$; $VD^2 = \frac{ai\,(c^2 + \frac{1}{2}\,ac - \frac{1}{2}\,ei)}{(a-i)^2} = \frac{ac^2 i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}\,aei}{a-i}$; donc finalement; $x = AD = AL + LV + VD = c + \frac{ci}{a-i} + VD = \frac{ac}{a-i} + \sqrt{\frac{ac^2 i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}\,aei}{a-i}}$; conforme au résultat de l'analyse, qui précède à la „Constructio".

Voir encore, sur la signification de l'autre racine de l'équation quadratique, ce qui va suivre dans le texte. Celle choisie par Huygens est la seule qui puisse satisfaire au problème pris dans sa conception la plus stricte, et elle y satisfait toujours.

Pour le montrer nous commençons par remarquer qu'on a toujours $d < f$, donc $a - i = a - \frac{dg}{f} = a - \frac{d}{f}(a-c) > 0$. Ensuite, laissant de côté le cas, qui ne présente aucune difficulté, que LF est parallèle à AC, nous supposons que les lettres A et L, C et F de la figure sont placées de telle manière que le point L soit plus près du côté AC que le point F. Alors $AK = e$ est positif, et l'on voit immédiatement que les racines de l'équation quadratique seront toujours réelles.

Soit maintenant $AD = x$ égal à la plus grande des deux racines. Alors $LD = x - c = \frac{ci}{a-i} + \sqrt{\frac{ac^2 i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}\,aei}{a-i}}$, c'est-à-dire, toujours positif. Il en est de même avec $BD = a - x = \frac{a(a-i) - ac}{a-i} - \sqrt{\frac{ac^2 i}{(a-i)^2} + \frac{\frac{1}{2}\,aei}{a-i}}$; puisque la condition que cette valeur soit positive conduit successivement aux relations:

radices. [12]) ſed altera inutilis VΘ [13]) in fig. poſtrema quae facit ut triang. LWΘ ſit aequale $\frac{1}{2}$ Δ^{i} BLF, ſimulque Δ^{m} ΘΑΩ dimid°. Δ^{i} BAC. [14])

duo igitur veri valores erunt radicis, ſi *cc* majus $\frac{1}{2}$ *ie*, hoc eſt quando Δ^{m} LΓA majus dimidio triang^{i}. BLF. [15])

$$[a(a-i) - ac]^2 > ac^2 i + \tfrac{1}{2} aei(a-i),$$
$$a(a-i)[a(a-i) + c^2 - 2ac - \tfrac{1}{2} ei] > 0,$$
$$(a-c)^2 - i(a + \tfrac{1}{2} e) > 0,$$
$$g^2 - \frac{g^2 (a + \frac{1}{2} e)}{a+e} > 0,$$

à la dernière desquelles il est évidemment satisfait.

Il en résulte que le point D tombe entre les points L et B, et que les conditions du problème seront donc toujours remplies par la solution de Huygens.

En choisissant au contraire pour la valeur de x la racine la plus petite, on aura $LD = x - c = \frac{ci}{a-i} - \sqrt{\frac{ac^2 i}{(a-i)^2} + \frac{1}{2}\frac{aei}{a-i}}$; mais la condition que cette valeur soit positive ne sera jamais remplie, puisque cela exigerait:

$$ac^2 i + \tfrac{1}{2} aei(a-i) < c^2 i^2;$$

c'est-à-dire $(c^2 i + \frac{1}{2} aei)(a-i) < 0$.

[12]) Puisqu' alors dans l'équation quadratique, qui précède la „Constructio problematis," le produit des deux racines est nécessairement positif.

[13]) En effet, on aura, en se servant de cette autre racine, $x = AV - VD = AV - V\theta = A\theta$.

[14]) Inutile de dire que dans le cas où la racine $A\theta$ deviendrait négative la solution rejetée admettrait une explication analogue; mais Huygens ne s'occupe pas de ce cas.

[15]) On a $AK(e) : KC(f) = AL(c) : L\Gamma\left(\frac{cf}{e}\right)$. L'inégalité $\Delta\, L\Gamma A > \frac{1}{2}\Delta\, BLF$, c'est-à-dire. $AL \times L\Gamma > \frac{1}{2} LD \times LN$ entraine donc $c^2 f > \frac{1}{2} cdg$, ou bien $c^2 > \frac{dg}{2f} \cdot e = \frac{1}{2} ie$.

IV. [1]

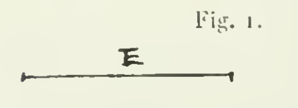
[1650].

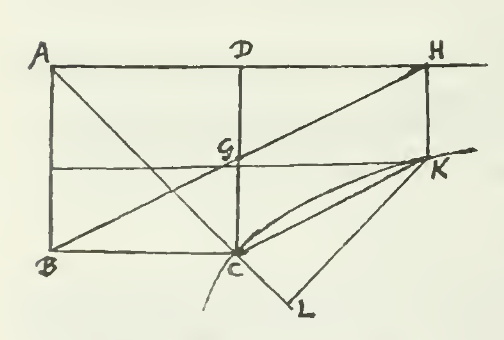
Problema.

Datum est quadratum BD, etque productum latus AD: oportet ex angulo B, ducere lineam BGH, ita ut pars GH sit aequalis datae lineae quae est E. [2])

Factum jam sit, et ducantur ipsis GH, GC parallelae CK, HK. est igitur DC ad GC vel HK sicut HB ad GB sive ut HA ad DA. quare erit ▭ quod lineis HA, HK continetur aequale ei quod continetur sub DA, DC, id est quadrato DB. est igitur punctum K ad hijperbolen, quae vertice C describitur ad asymptotos AB, AH. estque CK aequalis ipsi GH sive E. ducatur diagonalis AC, eaque producatur, et ducatur ad eam perpend. KL.

Fig. 1.





Sit AC ∞ a; E ∞ b; CL ∞ x; quia autem asymptoti continent angulum rectum, erit hijperboles CK latus rectum aequale transverso, unumquodque vero

[1]) La pièce se trouve pp. 147*a*—149 du manuscrit N°. 12 décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

[2]) Le problème est emprunté à Pappus, Lib. VII, probl. IIII, Prop. LXXII, p. 206, verso de l'ouvrage cité p. 259 du T. II, note 3, où l'on trouve une construction très élégante (celle reproduite ici par Huygens en second lieu) et une démonstration de cette construction. Descartes au Livre III de la Géométrie (p. 461—463 du T. VI de l'édition d'Adam et

aequ. duplae AC. itaque quadr. KL aequale erit rectangulo sub CL et dupla AC [3]), excedetque figura simili quae erit quadr. CL:

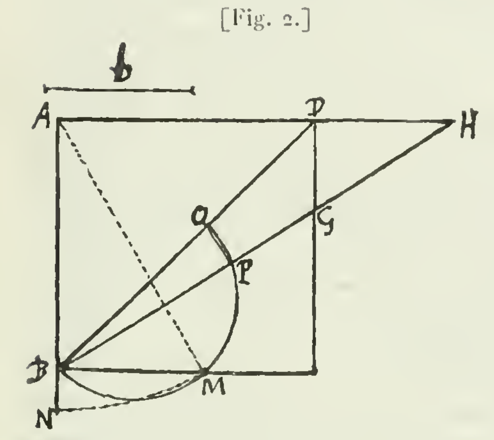
$$\left.\begin{matrix} bb \ \square\ \text{CK} \\ xx \ \square\ \text{CL} \end{matrix}\right\} \text{s[ubstr].}$$

$$\text{Ergo} \ \square\ \text{KL}, 2ax + xx \propto bb - xx \ \square\ \text{KL}$$

$$2xx \propto bb - 2ax$$

$$\text{CL}\ x \propto \sqrt{\tfrac{1}{4}aa + \tfrac{1}{2}bb} - \tfrac{1}{2}a.$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO

ex hisce inventa est hujusmodi.

Sit BM ∞ b. AN ∞ AM. descriptoque semicirculo BMO, ponatur OP ∞ BN, et ducatur BPGH, eritque GH ∞ b. quod erat faciendum. [4])

Hujus demonstratio facile elicitur ex demonstratione constructionis sequentis [5]), quae talis est.

Sit DR ∞ b [Fig. 3]. CS ∞ CR. BT ∞ TS. et scribatur semicirc. SHB. et jungatur BH, eritque HG aequalis b. [6]).

Tannery) le traite comme un exemple de l'usage de sa méthode de réduire les équations „solides", puisqu' en posant CG comme inconnue on arrive à une équation biquadratique qui se réduit à deux équations quadratiques. Van Schooten, dans ses „Commentarii" (p. 266—270 de l'édition de 1649 de l'ouvrage cité dans la note 1, p. 218 du T. I) explique la signification des racines rejetées pas Descartes.

Le texte qui va suivre semble en quelques endroits avoir été rédigé avec peu de soin; mais le point principal consiste dans la démonstration que le point K décrit une hyperbole équilatère, propriété connue déja par Pappus (voir la note 9), suivie de la remarque que le point C est le sommet de cette hyperbole. Dès lors il était clair que le problème est un problème plan dont la construction ne pouvait plus présenter aucune difficulté.

Plus tard, en 1652 (voir plus loin dans le Tome présent les „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653"), et ensuite en 1653 (voir ses lettres à van Schooten du 23 oct. et du 10 déc. p. 247—251 et 256—257 du T. I), Huygens est revenu sur ce problème et sur celui de la pièce N°. VIII (p. 239), qui en est une généralisation, pour en donner des solutions et démonstrations qu'il a reproduites avec de légères modifications dans les „Illustrium quorundam problematum constructiones" de 1654 aux „Probl. IV—VII." On y retrouvera, quant au problème qui nous occupe, au „Probl. IV", la construction de Pappus avec une démonstration bien plus simple que celle du texte présent.

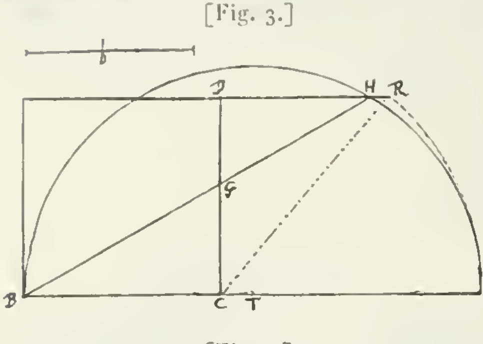
[3]) Il y a ici quelque confusion; mais les calculs, qui suivent, sont corrects.

[4]) La construction est bonne; mais on ne voit pas comment elle découle de ce qui précède.

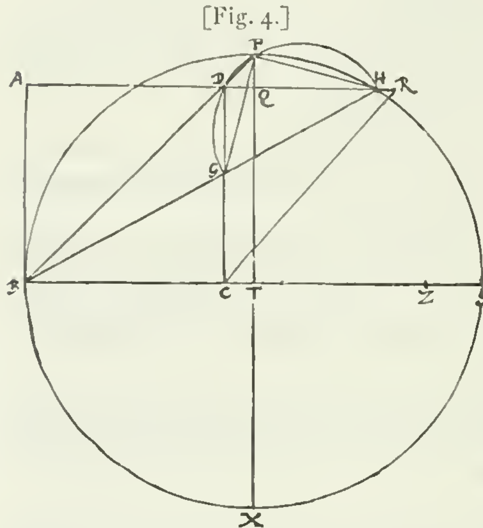
[5]) On ne le voit pas, puisque le demi-cercle de la figure 4 ne correspond nullement avec celui de la figure 2. Évidemment le texte à été composé à l'aide de plusieurs fragments, empruntés à des travaux préliminaires, dont le raccordement laisse à désirer.

[6]) C'est la construction de Pappus.

[Fig. 3.]



[Fig. 4.]



DEMONSRATIO

ducantur [Fig. 4] lineae BDP, PTX [7]), PH, PG. et super GH scribatur $\frac{1}{2}$ circ. GDH. et sit CZ ∞ BC.

Est igitur ZS diff. duarum CR, CD. BT autem dimidia est BS, et BC dimidia BZ; ergo CT sive PQ est dimidia ZS. quum autem BS sit summa duarum CD, CR; et ZS differentia earundem; erit rectangulum ZSB [8]) aequale differentiae quadratorum CR, CD, id est qu°. DR. ideoque rectang. QPX sive quad. PH aequ. dimidio quadrato DR. Porro quum angulus PDG una cum angulo GDB semirecto aequetur duobus rectis, sitque etiam angulus PHB semirectus, quoniam PB est quadrans circuli, manifestum est etiam duos angulos PDG, PHG aequari duobus rectis: quare necesse est semicirculum GDH etiam transire per punctum P. Est igitur et angul. PGH semirectus et aequalis angulo PHG. Igitur et quadr. ex PG aequale est quadr°. ex PH, id est dimidio quadrato DR. Ergo quadr. GH aequale quadrato DR; et linea GH aequalis DR. quod erat ostendend.

Problema hoc est apud Pappum Alex. lib. 7 prop. 72. et prima fronte omninò solidum esse videtur, quemadmodum revera esset, si quidem loco quadrati proponeretur rectangulum: ut videre est apud eund. Pappum lib. 4. propos. 31. [9]) de eodem hoc Problemate vide quae scripsit Cartesius lib. 3. Geom. Demonstratio Pappi [10]) â mea diversa est, sed prolixior videtur et difficilior.

[7]) PTX est l'un des diamètres du cercle BPSX, quisqu'on a $\angle$ PBT = 45°, donc arc. PS = 90°.

[8]) C'est-à-dire le rectangle qui a ZS et SB pour côtés.

[9]) Au lieu cité Pappus démontre que l'aire du rectangle AK (voir la Fig. 1) est égale à celle du rectangle ADCB. Ainsi le point K se trouve sur une hyperbole équilatère qui passe par le point C. Après quoi Pappus remarque que, pour achever la construction, on cherchera le point d'intersection de cette hyperbole avec un cercle ayant C pour centre et la ligne donnée pour rayon. Or puisque, dans le cas du rectangle traité par Pappus au lieu cité, le point C n'est plus le sommet de l'hyperbole, le problème devient solide.

[10]) Voir les „Propositiones LXXI et LXXII" du „Lib. VII".

V.[1]

[1650].

PROPOSITIO MIRABILIS, quam Pappus refert libr. 7 in princ. est hujusmodi;

Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum ducantur rectae lineae; et sint species sive quadrata quae ob omnibus fiunt dato spatio aequalia, punctum continget positione datam circumferentiam circ. [2])

Id nunc propositum sit investigare: et sint primum quidem data puncta non amplius tribus A, B, C. [3]) Oportet invenire quartum D, unde ductis DA, DB, DC, trium harum quadrata aequentur quadrato dato ex *d*.

---

[1]) La pièce se trouve aux p. 150—152 du manuscrit N°. 12 décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

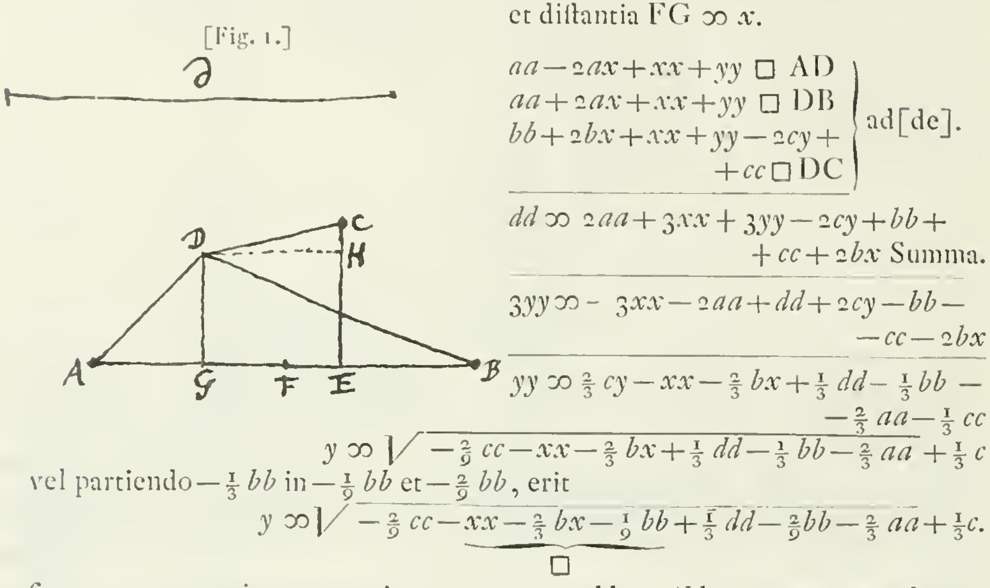
[2]) Voici le passage en question tel qu'on le trouve à la page 163 recto de la traduction de Commandin, mentionnée dans la note 4, p. 213 du Tome présent, là où Pappus donne un aperçu des „lieux plans" d'Apollonius: „Si à quotcumque datis punctis ad punctum vnum inflectantur rectae lineae: & sint species, quae ab omnibus fiunt dato spacio aequales punctum continget positione datam circumferentiam."

Comme on le voit, Huygens identifie les „species" avec les „quadrata". C'est encore la conception de van Schooten et de Fermat; voir respectivement les pages 273—276 et 37—47 (éd. Tannery et Henry T. I) de leurs ouvrages mentionnés dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent, où le même problème est traité. Simson au contraire, dans l'ouvrage: „Apollonii Pergaei locorum planorum libri II. Restituti a Roberto Simson M. D. Matheseos in Academia Glasguensi Professore. Glasguae, in Aedibus Academicis, Excudebant Rob. et And. Foulis Academiae Typographi. A. D. MDCCXLIX," entend par „species" des figures quelconques semblables dont l'un des côtés doit être égalé à la distance au point donné et il emploie même des figures différentes pour les divers points donnés; voir les pp. 159—182 et surtout la page 177 de l'ouvrage cité. Hultsch, au lieu cité dans la note 17 de la p. 215 du Tome présent, accepte cette interprétation de Simson en intercalant après „species" l'explication „(i. e. figurae specie datae)."

[3]) Le cas de deux points est traité par van Schooten à la p. 307 du manuscrit même dont la présente pièce est tirée.

Jungantur AB puncta, et in AB cadat perp. CE; et ſit AF vel FB ∞ a; FE ∞ b; EC ∞ c. Et ponatur jam inventum punctum D: ſitque perp. DG ∞ y, et diſtantia FG ∞ x.

[Fig. 1.]



$$\left.\begin{array}{r} aa-2ax+xx+yy \;\square\; \mathrm{AD} \\ aa+2ax+xx+yy \;\square\; \mathrm{DB} \\ bb+2bx+xx+yy-2cy+ \\ +cc \;\square\; \mathrm{DC} \end{array}\right\}\ \text{ad[de].}$$

$$dd \infty 2aa+3xx+3yy-2cy+bb+ \\ +cc+2bx \text{ Summa.}$$

$$3yy \infty -3xx-2aa+dd+2cy-bb- \\ -cc-2bx$$

$$yy \infty \tfrac{2}{3}cy-xx-\tfrac{2}{3}bx+\tfrac{1}{3}dd-\tfrac{1}{3}bb- \\ -\tfrac{2}{3}aa-\tfrac{1}{3}cc$$

$$y \infty \sqrt{-\tfrac{2}{9}cc-xx-\tfrac{2}{3}bx+\tfrac{1}{3}dd-\tfrac{1}{3}bb-\tfrac{2}{3}aa}+\tfrac{1}{3}c$$

vel partiendo $-\frac{1}{3}bb$ in $-\frac{1}{9}bb$ et $-\frac{2}{9}bb$, erit

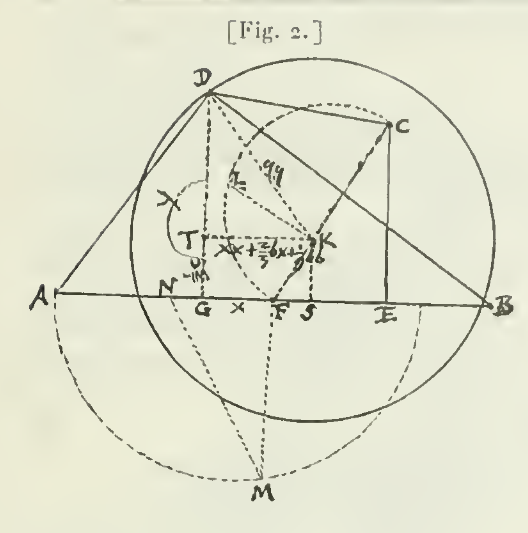
$$y \infty \sqrt{-\tfrac{2}{9}cc-\underbrace{xx-\tfrac{2}{3}bx-\tfrac{1}{9}bb}_{\square}+\tfrac{1}{3}dd-\tfrac{2}{9}bb-\tfrac{2}{3}aa}+\tfrac{1}{3}c.$$

ſint autem quantitates cognitae $-\frac{2}{9}cc+\frac{1}{3}dd-\frac{2}{9}bb-\frac{2}{3}aa \infty qq$ ſietque $y \infty \sqrt{qq-xx-\frac{2}{3}bx-\frac{1}{9}bb}+\frac{1}{3}c$, vel ſi punctum D alio loco quaeratur, adeo ut perp. DG cadat ad alteram partem puncti medij F, erit $y \infty \sqrt{qq-xx+\frac{2}{3}bx-\frac{1}{9}bb}+\frac{1}{3}c$. Et ſi punctum D quaeratur infra lineam AB, habebitur in aequatione $yy \infty -\frac{2}{3}cy-xx$ &c.[4]) et erit $y \infty \sqrt{qq-xx-\frac{2}{3}bx-\frac{1}{9}bb}-\frac{1}{3}c$. quae omnia procedunt à primâ quadratorum ſupputatione. Si autem qu. x ♀ [5]) $\frac{1}{3}b$ majus ſit quam $qq-\frac{1}{6}cc$, erit $y \infty \frac{1}{3}c+$ vel $-\sqrt{qq-xx \text{ ♀ } \frac{2}{3}bx-\frac{1}{9}bb}$ [4]).

[4]) On remarquera que l'y de Huygens représente la valeur *absolue* de la ligne DG. C'est aussi le point de vue de van Schooten qui après avoir déduit une expression analogue pour la valeur de y, fait suivre: „Atque ita videre est, datis quotcunque punctis," (par la valeur de leur x) semper ejusmodi terminos inveniri; praeterquam quòd quidam ex illis interdum abesse possunt" (dans le cas où l'expression pour y deviendrait imaginaire), signaque + & — diversimodè mutari.

[5]) Par ce signe Huygens indique qu'on doit intercaler, selon les circonstances, le signe + ou le signe —.

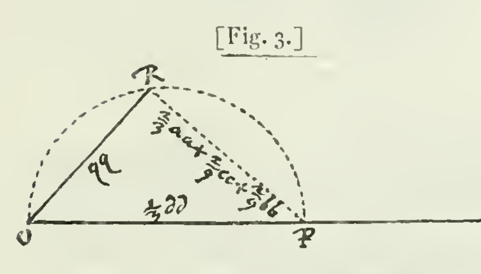
[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Jungatur FC. ſitque FK ∞ $\frac{1}{3}$ FC, eſtque KL qu. ∞ $\frac{2}{9}$ *bb* + $\frac{2}{9}$ *cc*. ſit FN ∞ KL, et FM qu. ∞ $\frac{2}{3}$ *aa*. ſit NM q. ∞ $\frac{2}{3}$ *aa* + $\frac{2}{9}$ *cc* + $\frac{2}{9}$ *bb*. □OP [Fig. 3] ſit ∞ $\frac{1}{3}$ q. OQ, id eſt $\frac{1}{3}$ *dd*. PR ∞ NM. et centro K deſcribatur ſemidiam.° KD ∞ RO circulus; et ubicunque in eo capiatur punctum D; ductiſque DA, DB, DC, erunt harum trium quadr.ª aequalia qu.° OQ.

[Fig. 3.]



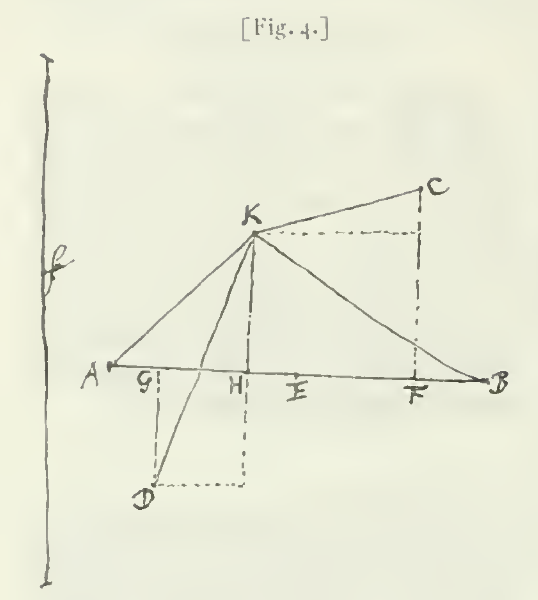
Determinatio haec eſt; quod $\frac{2}{3}$ *aa* + + $\frac{2}{9}$ *cc* + $\frac{2}{9}$ *bb* non debeat major eſſe quam $\frac{1}{3}$ *dd*, et ſiquidem haec aequalia fuerint erit quaeſitum punctum in K, atque ibi tantum.

Animadverſione dignum eſt, centrum K eſſe quoque grav. centrum trianguli quem data puncta A, B, C, conſtituunt. [6])

[6]) Comparez encore la page 175 du T. I, où Huygens a donné à sa solution la forme d'un théorème.

La remarque, dont il s'agit ici, ne se rencontre pas dans les solutions de van Schooten et de Fermat que nous avons mentionnées dans la note 2. Toutefois Fermat, dans une lettre à Roberval de février 1637 (voir p. 100—102 du T. II de ses „Oeuvres", éd. Tannery et Henry), après lui avoir annoncé sa démonstration du théorème d'Apollonius qu'il appelle „une des plus belles propositions de la Géométrie", ajouta: „Si puncta data sint tantum tria constituant triangulum, centrum circuli localis erit centrum gravitatis illius trianguli, et haec propositio singularis satis est mira." Et s'il n'a pas généralisé ce résultat pour le cas de plus de trois points, c'est probablement parce que la notion de centre de gravité de points mathématiques lui manquait. En effet, cette notion de Huygens excita encore en 1657 l'étonnement de de Sluze qui ne la comprit pas de premier abord; voir les pages 39 et 40 du T. II.

[Fig. 4.]



Sint jam data puncta quatuor, A, B, C, D et ponatur jam inventum quintum K.

Jungantur duo puncta A et B, et ex reliquis cadant in AB perpendiculares CF, DG et KH, et ſit AE vel EB $\infty\ a$; EF $\infty\ b$; FC $\infty\ c$; EG $\infty\ d$; GD $\infty\ e$; EH $\infty\ x$; HK $\infty\ y$ et datum quadr. $\infty\ ff$.

ad. $\left\{\begin{array}{l} \square\, \mathrm{AK}\ aa - 2ax + xx + yy \\ \square\, \mathrm{BK}\ aa + 2ax + xx + yy \\ \square\, \mathrm{KC}\ bb + 2bx + xx + yy - 2cy + cc \\ \square\, \mathrm{KD}\ dd - 2dx + xx + yy + 2ey + ee \end{array}\right.$

$$4yy - 2cy + 2ey + 4xx - 2dx + 2bx + 2aa + bb + dd + cc + ee \infty ff$$

$$yy \infty \tfrac{1}{2}cy - \tfrac{1}{2}ey - xx + \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{2}bx - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}bb - \tfrac{1}{4}dd - \tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{4}ee + \tfrac{1}{4}ff$$

et quaedam partiendo, et addendo et detrahendo $\frac{1}{8}\,bd$ ſit:

$$yy \infty \tfrac{1}{2}cy - \tfrac{1}{2}cy \underbrace{- xx + \tfrac{1}{2}dx - \tfrac{1}{2}bx - \tfrac{1}{16}dd + \tfrac{1}{8}bd - \tfrac{1}{16}bb}_{\text{eſt quadr. cujus radix } x - \frac{1}{4}d + \frac{1}{4}b \text{ ſit } \infty\ z} -$$

$$- \left\{\tfrac{1}{2}aa + \tfrac{1}{4}cc + \tfrac{1}{4}ee + \tfrac{3}{16}bb + \tfrac{3}{16}dd + \tfrac{1}{8}bd\right\} + \tfrac{1}{4}ff$$

ergo ſit

$$yy \infty \tfrac{1}{2}cy - \tfrac{1}{2}ey - zz + \tfrac{1}{4}ff - \tfrac{1}{2}aa - \tfrac{1}{4}cc - \tfrac{1}{4}ee - \tfrac{3}{16}bb - \tfrac{3}{16}dd - \tfrac{1}{8}bd$$

addendo jam quadr. ex $\frac{1}{4}c - \frac{1}{4}e$ ad reliquas quantitates cognitas ſit $\frac{1}{4}ff - - \frac{3}{16}cc - \frac{1}{8}ce - \frac{3}{16}ee - \frac{1}{2}aa - \frac{3}{16}bb - \frac{3}{16}dd - \frac{1}{8}bd$ quod vocetur qq.

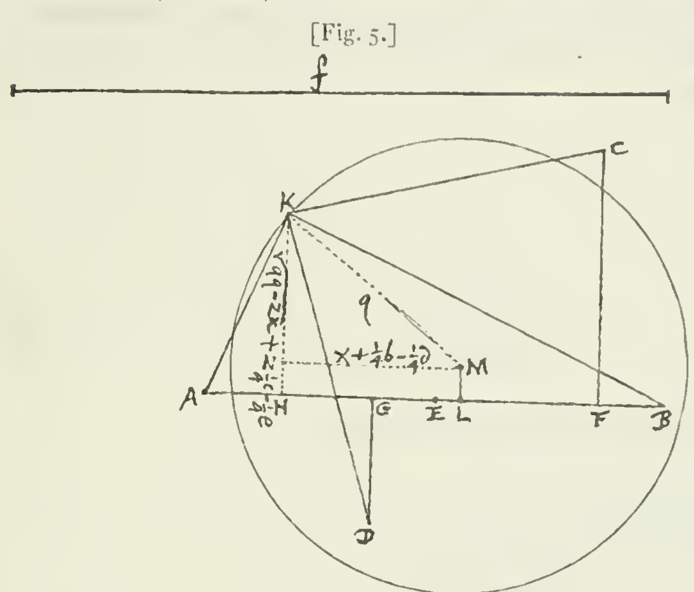
Ergo $y \infty \sqrt{qq - zz} + \frac{1}{4}c - \frac{1}{4}e$. Unde patet punctum K rurſus eſſe ad circuli circumferentiam. Eritque conſtructio problematis hujusmodi.

Sit EL [Fig. 5] $\infty\ \frac{1}{4}$EF $- \frac{1}{4}$EG ſumenda verſus F quoniam EF major eſt quam EG. ſit perpd. LM $\infty\ \frac{1}{4}$FC $- \frac{1}{4}$GD, ſumenda ſupra lineam AB quoniam FC major eſt quam GD. Et inventâ lineâ q, ſit ea ſemidiameter circuli deſcripti centro M; et quodcunque punctum ejus circumferentiae propoſito ſatisfaciet, ut ex ipſa conſtructione manifestum eſſe poteſt.

Evidens quoque eſt, punctum M eſſe illud, è quo ſi ducantur quatuor lineae ad data puncta A, B, C, D, omnium ſimul quadrata ſint minima quae eſſe poſſint. [6])

Si punƈta ita dentur ut utrumque C et D ſit ad eaſdem partes lineae AB, tum erit LM ∞ $\frac{1}{4}$ FC + $\frac{1}{4}$ GD.

[Fig. 5.]



Item ſi utraque perpendicularis cadat in lineam AB ad eaſdem partes medij E. tum EL erit ∞ $\frac{1}{4}$ EF + + $\frac{1}{4}$ EG; atque haec ex prima quadratorum supputatione manifeſta ſunt.

Datis autem quotcunque punƈtis invenietur circuli quaeſiti centrum hoc paƈto:

duo quaevis ex datis punƈtis jungantur lineâ reƈtâ, quae biſariam dividatur, et cadant in eam ex punƈtis reliquis perpendiculares; tum omnes diſtantiae perpendicularium quae ſunt ab una parte punƈti medij, auferantur ab omnibus diſtantijs quae ſunt ab altera parte ejuſdem medij et reſiduum dividatur in tot partes aequales quot ſunt data punƈta, earumque partium una ſtatuatur à punƈto medio. verſus eam partem ubi ſumma diſtantiarum major eſt; atque ad ejus partis terminum ponatur verſus partem ubi ſumma perpendicularium major eſt, perpendicularis aequalis uni parti differentiae quae eſt inter omnes perpendiculares ab una et altera parti lineae, diviſae ſimiliter in tot partes aequales quot ſunt data punƈta: Eritquae hujus perpendicularis terminus centrum circuli quaeſitum. [7])

Longitudo autem ſemidiametri pendet à quantitate ſpatij dati. [8])

Verùm ſi invento centro quilibet circulus deſcribatur, atque à punƈto quod ſit in ejus circumfer.[a] ducantur lineae ad data punƈta. atque item ex alio ejuſdem

---

[7]) Fermat, au lieu cité dans la note 2, donne à la page 47, une construction identique. Van Schooten ne s'occupe que très sommairement du cas général. où il y a plus que trois points donnés.

[8]) Fermat ajoute le théorème élégant que le carré du rayon du cercle, multiplié par le nombre des points donnés, et augmenté par les carrés des distances du centre aux points donnés, égale l'espace donné.

circumfer.ae puncto ad data puncta lineae ducantur; erunt omnium harum quadrata illarum omnium quadratis aequalia.

Centrum circuli quaesitum semper est centrum gravitatis datorum punctorum [9]), ut hic punctum M centr. gr. punctorum A, B, C, D, quod ex constructione superiori facile deducitur.

---

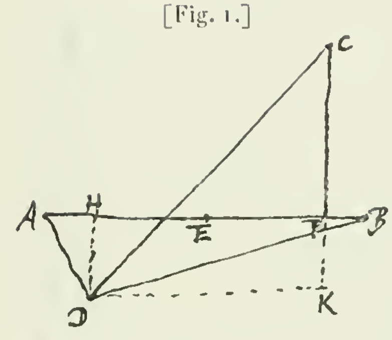
[9]) Consultez encore sur ce théorème les Lettres N°. 394—399, p. 37—44 du Tome II, qui appartiennent à la correspondance avec de Sluse de l'année 1657, et la „Prop. XII" de la „Pars quarta" de l' „Horologium oscillatorium", où Huygens est revenu sur le même problème.

VI.[1]

[1650].

AD CIRCUMFERENTIAM.

[Fig. 1.]



Datis tribus punctis A, B, C, invenire quartum D unde si ducantur rectae DA, DB, DC, sint duo quadrata ex DA, et DB aequalia quadrato ex DC.

Junctae AB sit medium E, et sint perpend.es CF, DH.

Ponatur AE vel EB ∞ a; EF ∞ b; FC ∞ c; EH ∞ x; HD ∞ y.

ad[de] $\begin{cases} \square\,\text{DA}\ aa - 2ax + xx + yy \\ \square\,\text{DB}\ aa + 2ax + xx + yy \end{cases}$ ad. $\begin{cases} \square\,\text{HF}\ bb + 2bx + xx \\ \square\,\text{KC}\ cc + 2cy + yy \end{cases}$

$\square\,\text{DA} + \square\,\text{DB}\ 2aa + 2xx + 2yy \infty bb + 2bx + xx + cc + 2cy + yy\ \square\,\text{DC}$

$yy + xx + 2aa \infty bb + 2bx + cc + 2cy$

$yy \infty 2cy - xx + 2bx + bb - 2aa + cc$ substr. et adde $2bb$

$yy \infty 2cy - \underbrace{xx + 2bx - bb}_{\square} + 2bb - 2aa + cc$ addito qu° cc

ad reliq. quantitates cognitas, sicut fieri oportet sit $2cc + 2bb - 2aa$ quod vocetur qq.

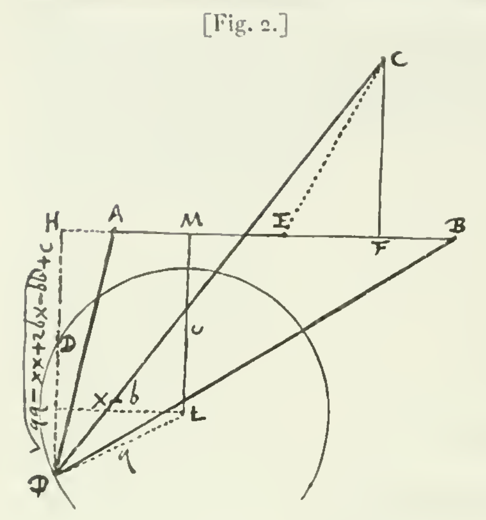
Ergo $y \infty$ ♌[2]) $\sqrt{qq - xx + 2bx - bb} + c$.

---

[1]) La pièce se trouve p. 153 du manuscrit N°. 12 décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

[2]) Comparez la note 5 de la pièce N°. V, p. 230.

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Sit EM ∞ EF; et perp. ML ∞ FC. et junctâ EC, ſit quadr. LD ∞ duplum differ. quadratorum EC, EA: et deſcribatur ſemidiam.° LD circulus LDD: Si enim in ipſius circumferentia ſumatur quodvis punctum ut D, atque inde ducantur lineae ad data puncta A, B, C, Erit quadr. ex DC, aequale duobus, ex DA et DB.

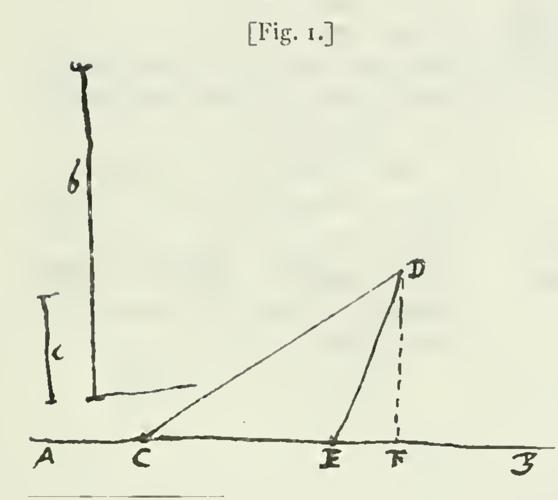
debet autem EC major eſſe quam EA vel EB.

VII.[1]

[1650].

AD CIRCUMFERENTIAM. ex Pappo.[2]

[Fig. 1.]



Data positione lineâ rectâ AB, in eâque puncto C, invenire punctum D, è quo si ducantur lineae, DC quidem ad datum punctum, et DE in dato angulo DEB; fiat quadratum ex DC aequale rectangulo quod continetur abscissâ CE et lineâ data b.

Quoniam angulus DEB datus est erit data quoque proportio perpend.is DF ad FE, quae sit ut b ad c. et sit CF ∞ x, FD ∞ y.

---

[1]) La pièce se trouve p. 154 du manuscrit N° 12, décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

[2]) Voir, à la page 163 recto de la traduction de Commandin mentionnée dans la note 4, p. 213 du Tome présent, le passage suivant qu'on trouve là où Pappus donne l'aperçu des „lieux plans" d'Apollonius: „Si sit positione data recta linea, & in ipsa datum punctum, à quo ducatur quaedam linea terminata, à termino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit à ducta aequale ei, quod à data, & abscissa, ... terminus ipsius positione datam circumferentiam contingere." Fermat d'ailleurs (voir la p. 33 du T. I de l'édition de Tannery et Henry) a donné à ce passage une autre interprétation que Huygens en remplaçant l'angle donné DEB de Huygens par un angle droit. Hultsch, au lieu cité dans la note 17, p. 215 du Tome présent, soutient la conception de Fermat. Simson, dans l'ouvrage cité dans la note 2 de la p. 229, semble hésiter entre les deux interprétations, qu'il traite toutes les deux dans les pages 125—134.

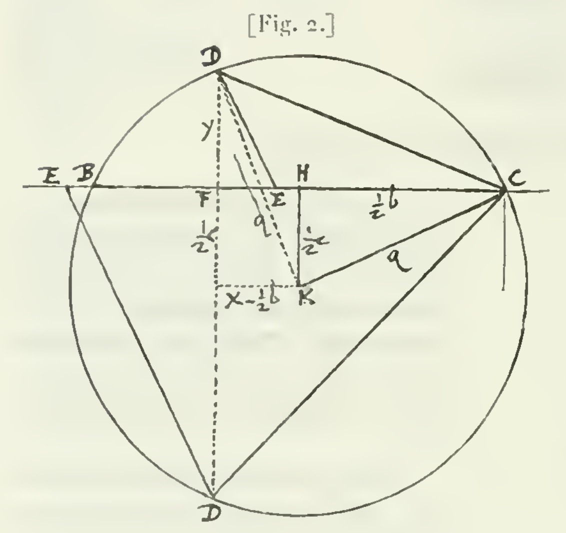
$$b \text{ —— } c \text{ —— } DF(y) \text{ —— } FE\left(\frac{cy}{b}\right)$$

$$\text{ergo } CF\ x - \left.\begin{matrix}\frac{cy}{b} \\ b\end{matrix}\right\}\ \text{m[ultipl.]}$$

$$\square\ CD\ xx+yy \infty bx - cy \ \square\ CF, b.$$
$$yy \infty - cy \div xx + bx \text{ deme et adde: } \tfrac{1}{4} bb$$
$$yy \infty - cy - \underbrace{xx+bx - \tfrac{1}{4}bb}+\tfrac{1}{4}bb$$

$$\text{fit } \tfrac{1}{4} cc + \tfrac{1}{4} bb \infty qq \text{ fit } y \infty \sqrt{qq - xx + bx - \tfrac{1}{4}bb} - \tfrac{1}{2}c.$$

[Fig. 2.]



CONSTR. Sumatur CB ∞ b. CH ∞ $\frac{1}{2}b$. perpend. HK ∞ $\frac{1}{2}c$. est igitur datus angulus HKC. Centro K, radio KC scribatur circulus: punctumque D sumatur ubivis in ipsius circumferentia, atque inde ducantur DC; et DE in dato angulo HKC; eritque qu. DC aequale rectangulo sub EC, CB ut oportebat.

Notandum tamen, quod si in parte circumf.ae quae est infra lineam BC sumatur punctum D, tum angulum internum versus punctum C debere esse angulo dato aequalem.

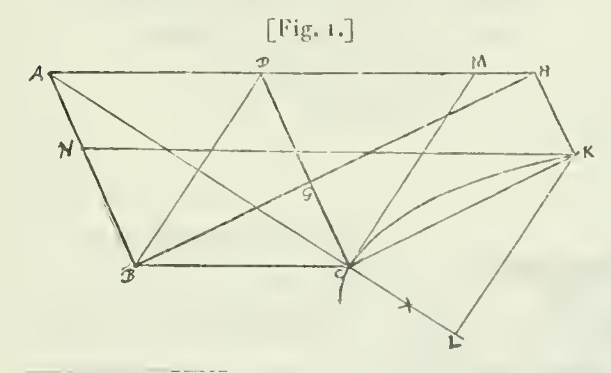
VIII.[1])

[1650].

Ex Pappo.[2])

Rhombo dato DB, ejusque producto latere AD: Oportet ex angulo B educere lineam BGH, cujus pars GH sit aequalis lineae E datae.[3])

[Fig. 1.]



Factum jam sit, et ducantur ipsis CG, GH, parallelae HK, KC. Est igitur DC ad GC vel HK, ut HB ad GB vel ut HA ad DA, ideoque quod continetur lineis DA, DC aeq. ei quod continetur medijs HA, GC vel HK: Ergo punctum K est ad hijperbolen, quae vertice C describitur ad asymptotos AB, AH. linea

---

[1]) La pièce se trouve p. 155—156 du manuscrit N° 12, décrit dans la note 1 de la page 7 du Tome présent.

[2]) Voir, à la page 163 verso du „liber VII" de l'ouvrage cité p. 259, T. II, note 3, l'aperçu de l'ouvrage „De inclinationibus" d'Apollonius, où on lit: „Et cum hoc sit problema universale. Duabus lineis positione datis inter ipsas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad datum punctum pertineat: in hac particularibus subiecta differentia habentibus, alia quidem erant plana, alia solida alia vero linearia. Ex planis autem, quae ad multa vtiliora sunt eligentes problemata haec ostenderunt.... Rhombo data, & vno latere producto aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quae ad oppositum angulum pertineat."

[3]) Le problème peut être considéré comme une généralisation du problème traité dans la pièce N°. IV, p. 226. Huygens y est revenu plus d'une fois. Voir, là-dessus, la note 1 de la pièce N°. IV citée.

autem CK aequalis eſt ipſi GH ſive E. datum eſt igitur punctum K, unde et H datum erit.

Scribit autem Pappus [2]) hoc problema ſolidum non eſſe ſed planum, lib. 7. in pr. de inclinat.; Quaerenda eſt igitur alia constructio. Sit AC ∞ a, DB ∞ b, linea E ∞ c, CL ∞ x, Sunt autem KL, CM, parallelae diametro DB. CM igitur vel DB poteſt quartam figurae partem quae ſub latere tranſverſo et recto hijperboles CK continetur per 1, lib. 2, Con. [4]) et eſt AC $\frac{1}{2}$ lateris tranſverſi. Igitur $\frac{bb}{\frac{1}{2}a}$ ſive $\frac{2bb}{a}$ eſt latus rectum. Ad inveniendum nunc. qu LK, fiat

ut l. trans. $(2a)$ ad l. rect. $\left(\frac{2bb}{a}\right)$ ita 2AC+CL $(2a+x)$ ad lineam

$$\left(\frac{2bba+bbx}{aa}\right) \text{ m[ult].}$$

$$(x) \text{ CL}$$

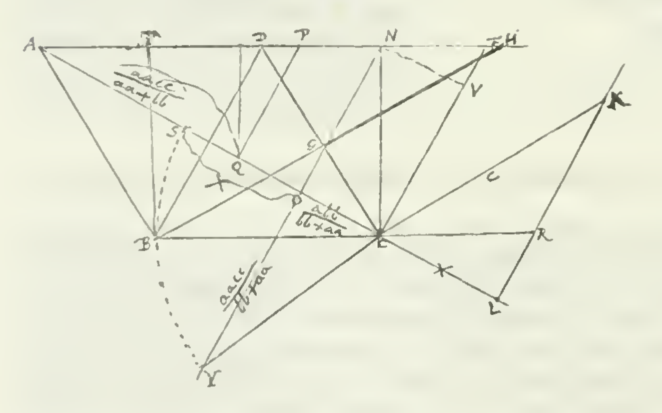
$$\square \text{KL } cc - xx \infty \frac{2bbax+bbxx}{aa} \square \text{KL}$$

$$aacc - aaxx \infty 2bbax + bbxx$$

$$aacc - 2b^2ax \infty bbxx + aaxx$$

$$\frac{aacc - 2b^2ax}{bb+aa} \infty xx$$

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO [5])

AP ∞ E

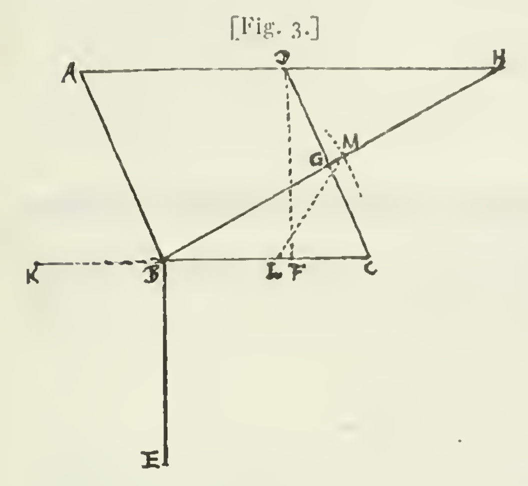
BGH parall. CK.

[4]) Voir la note 51 de la page 114 du Tome présent.

[5]) Voici cette construction telle qu'elle se déduit de l'équation quadratique qui précède. et

Propter △la similia PAQ, ENV, RCL, augeri possunt omnia eadem proportione: sumendo CL, CR: pro OC, NE hoc est TD: pro OY hoc est QA, AP ∞ c. Hinc invenitur

[Fig. 3.]



CONSTRUCTIO BREVIOR.[6])

BE est linea data. DF est perpend. ad BC; BK ∞ BF. qu. KL aeq. qu.° BE + qu. BK. LM parall. BD. BM ∞ ∞ BE BGMH est linea. Erit jam GH ∞ BE, quod erat fac[iendum].

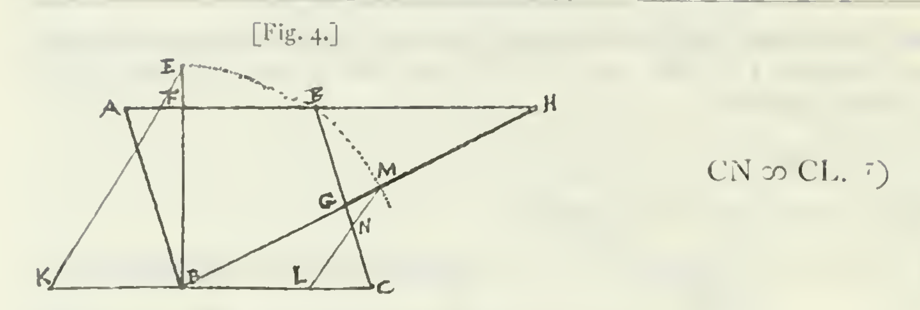
---

qu'on la retrouve dans la Fig. 2.

Posons $\frac{b^2a}{b^2+a^2}=p$, $\frac{a^2c^2}{b^2+a^2}=q^2$; alors l'équation quadratique s'écrit: $q^2-2px=x^2$, et l'on a $x=\text{CL}=\sqrt{p^2+q^2}-p$. Or, pour construire $p=\frac{b^2a}{b^2+a^2}$ il suffit de mener CN perpendiculaire sur BC et d'abaisser la perpendiculaire NO sur AC; alors OC $=p$ comme il est facile à vérifier. De même, pour trouver q, on n'a qu'à prendre AP égal à la ligne donnée $E=c$ et à abaisser la perpendiculaire PQ; alors AQ $=q$. Prenant ensuite, sur le prolongement de NO, OY égal à AQ, on a CY $=\sqrt{p^2+q^2}=$ SC (le cercle SY ne passe par le point B que par accident), et OS $=x=$ CL. On peut donc construire le triangle rectangle CKL, où CK $=E=c$, et mener enfin, comme il est indiqué dans le texte, BGH parallèle à CK.

6) Voici comment. On a d'après les remarques qui précèdent: $\frac{\text{CR}}{\text{CL}}=\frac{\text{TD}}{\text{OC}}=\frac{c}{\text{OY}}=\lambda$; donc (mettant entre crochets les lignes qui se rapportent à la Fig. 3 de la construction abrégée): (BE) $=\lambda$OY, (BK) $=$ (BF) $=$ TD $=\lambda$OC, (KL) $=$ (KE) $=\lambda$CY $=\lambda$SC, (BL) $=$ $=$ (KL) $-$ (KB) $=\lambda$SC $-\lambda$OC $=\lambda$OS $=\lambda$CL $=$ CR; mais alors le triangle (BLM) est égal au triangle CRK, puisqu' on a (BL) $=$ CR, BM $=$ CK, $\angle$ (BLM) $=\angle$ CRK; d'où il suit que l'angle (MBL) est égal aux angles KCR et HBR et que les lignes BH des deux figures se correspondent.

[Fig. 4.]



CN ∞ CL. [7]

Eadem eſt conſtructio ſi angulus C ſit obtuſus. niſi quod tum producere oportet BA ut ipſi occurrat BF.

Alia ſolutio hujus probl. eſt in geometria inclin. Apollonij, reſtituta à Marino Getaldo; [8]) ſed conſtructio prolixior.

Aliam ego poſtea inveni. [9])

---

[7]) La construction de la Fig. 4 ne diffère pas essentiellement de celle de la Fig. 3. La remarque CN ∞ CL peut servir à construire la ligne LN qui sera parallèle à la ligne BB.

[8]) Voir la note 5 de la page 126 du T. VIII. On trouve en effet la construction en question aux pages 330—333 de l'ouvrage de Ghetaldi cité en dernier lieu dans la note mentionnée. Toutefois Huygens fait allusion ici à l'ouvrage cité en premier lieu dans la même note, où l'on rencontre la même construction aux pages 17—19.

[9]) Voir les „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653", où l'on trouvera sous la date du 9 févr. 1652 une autre solution du même problème. Consultez aussi la note 1 de la pièce N°. IV, p. 226.

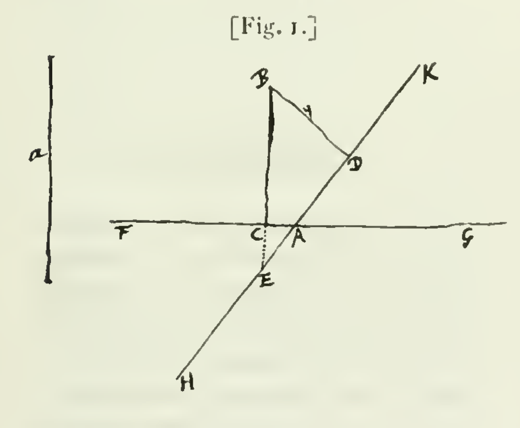
IX. [1])

[1650].

AD LINEAM RECTAM.

Datis positione duabus lineis FG, HK, quarum intersectio A, invenire punctum ut B, unde si ducantur BD, BC in datas lineas ad angulos rectos, duae simul aequales sint lineae datae a. [2])

[Fig. 1.]



Sit AD ∞ x, DB ∞ y; et producatur BC usque in lineam HK.

Quoniam igitur noti sunt tres anguli trianguli BDE erit quoque nota proportio lineae BD ad DE quae sit ut z ad b. erit ergo DE $\infty \frac{by}{z}$, et EA ∞ $\infty \frac{by}{z} - x$.

Et ponendo esse BD ad BE ut z ad c, erit BE $\infty \frac{cy}{z}$.

[1]) La pièce est empruntée aux pages 157 et 158 du manuscrit N°. 12.

[2]) Le problème constitue un cas particulier du problème plus général, mentionné par Pappus dans son aperçu des „lieux plans d'Apollonius" dans les termes suivants (traduction de Commandin): „Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas.... ducantur rectae lineae in dato angulo,.... quarum vna simul cum ea, ad quam alteram proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam positione datam." Ce dernier problème fut traité par van Schooten et par Fermat; voir respectivement les pages 238—240 et 23—24 (éd. Tannery et Henry T. I) de leurs ouvrages mentionnés dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent.

BE $\left(\frac{cy}{z}\right)$ —— DE $\left(\frac{by}{z}\right)$ —— EA $\left(\frac{by}{z} - x\right)$ —— EC $\left(\frac{bby - bxz}{cz}\right)$ ſubtr. ex BE $\left(\frac{cy}{z}\right)$

BC $\left(\frac{cy}{z} - \frac{bby + bxz}{cz}\right)$ a[dde].
BD (y)

$$a \infty \frac{cy + zy}{z} - \frac{bby + bxz}{cz}$$

$$acz \infty ccy + czy - bby + bxz$$

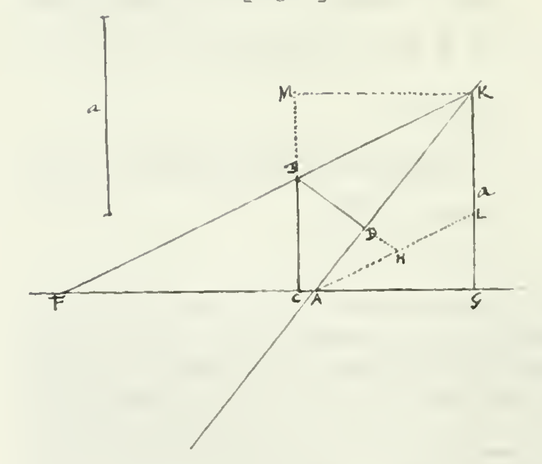
$$acz - bxz \infty ccy + czy - bby$$

$$\frac{acz - bxz}{cc + cz - bb} \infty y$$

$$\frac{ac - bx}{\frac{cc - bb}{z} + c} \text{ eſt autem } \frac{cc - bb}{z} \infty z \text{ propter } \triangle \text{ rectg.}$$

$$\frac{ac - bx}{z + c} \infty y$$

[Fig. 1.]



CONSTRUCTIO.

Intra angulum KAG adaptetur perpd. KG aequalis datae lineae a, et ſumptâ AF aequali AK, jungatur KF; ſumpto enim in linea KF puncto B ad lubitum, ductiſque in datas lineas perpend.bus BD, BC, erunt hae duae aequales lineae a. quod manifeſtum fiet ductâ AL parallela FK: quae angulum KAG bifarium dividet.

Erit enim KA + AG ad KA ut KG ad KL; et quoniam data eſt proportio lineae AG ad AK ut z ad c, erit LK $\infty \frac{ac}{z+c}$, huic autem aequalis eſt HB, quoniam angulus HBK aequ. eſt

angulo LKB, et HL parallela BK; ergo et HB ∞ $\frac{ac}{z+c}$. et quoniam FG eſt ad GK ſic AD ſive x ad DH, eſtque data proportio duarum KA, AG id eſt unius FG ad GK ut $z+c$ ad b, erit DH ∞ $\frac{bx}{z+c}$; quare DB ∞ $\frac{ac-bx}{z+x}$ ut oportebat.

Manifeſta autem eſt hujus demonſtratio, ductâ KM parall. GF, productâque CB. eſt enim BM ∞ BD, ideoque duae BC, BD ſimul aequales CM id eſt GK. quod erat demonſtr.

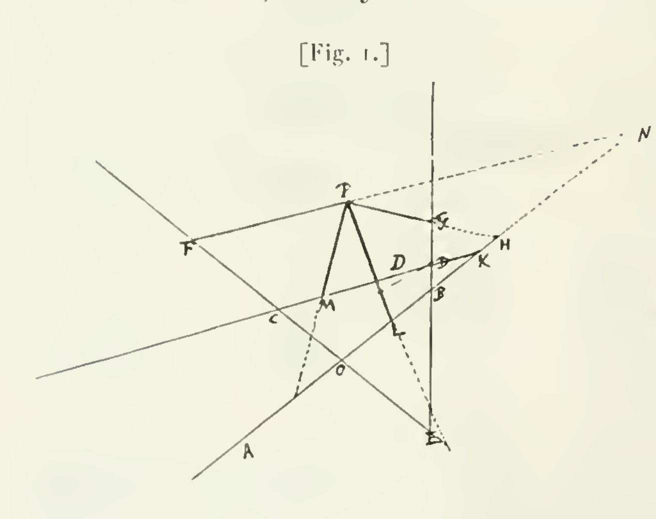
X. [1])

[1650].

Datis positione quatuor lineis AB, CD, EF, EG, invenire punctum ut P, unde si ad eas ducantur in datis angulis lineae PL, PM, PF, PG, sint hae omnes, datae lineae a *aequales.* [2])

Productae omnes lineae datae conveniant cum linea AB, itemque omnes quaesitae. et sit BL ∞ x, LP ∞ y.

[Fig. 1.]



Primò sciendum est, omnes triangulos qui ex hisce intersectionibus oriuntur specie datos, ideoque et rationem laterum datam esse. Ponendo igitur PL esse ad LH sicut z ad b, erit LH $\infty \frac{by}{z}$, et BH ∞ $\infty \frac{by}{z} - x$. et ponendo PL esse ad PH sicut z ad c erit PH $\infty \frac{cy}{z}$. et ponendo BH ad HG ut z ad d, erit HG ∞ $\infty \frac{dby - dxz}{zz}$, quare erit PG

[1]) La pièce se trouve aux pages 159—161 du manuscrit N°. 12.

[2]) Le problème a été inspiré sans doute par celui qui est formulé comme il suit dans la traduction de Commandin de l'aperçu des lieux plans d'Apollonius par Pappus (p. 162 verso de l'ouvrage mentionné dans la note 4 de la page 213 du Tome présent): „Et si sint quotcunque rectae lineae positione datae: atque ad ipsis à quodam puncto ducantur rectae lineae in datis angulis, sit autem quod data linea, & ducta continetur vna cum contento data linea,

$\infty\, \frac{cyz - dby + dxz}{zz}$. ponendo item PL ad PN ut z ad c, erit PN $\infty\, \frac{cy}{z}$. quia autem lineae ſunt poſitione datae, data eſt BO quae vocetur p: ergo LO $\infty\; p - x$. ponatur PL ad LN ut z ad f, ergo LN $\infty\, \frac{fy}{z}$, et tota ON $\infty\, \frac{fy}{z} + p - x$. ponatur ON ad NF ut z ad g, ergo erit NF $\infty\, \frac{gfy + gpz - gxz}{zz}$. eſtque inventa PN $\infty\, \frac{ey}{z}$ ergo reliqua PF $\infty\, \frac{gfy + gpz - gxz - eyz}{zz}$. Reſtat adhuc invenienda PM. Ponatur PL ad PA ut z ad h, ergo PA $\infty\, \frac{hy}{z}$. ponatur item PL ad LA ut z ad k, ergo LA ∞ $\infty\, \frac{ky}{z}$; eſtque inventa LO $\infty\; p - x$, ergo OA $\infty\, \frac{ky}{z} - p + x$. data autem eſt OK, quia lineae poſitione datae ſunt, eaque vocetur q, ergo tota KA $\infty\; q + \frac{ky}{z} - p + x$. ponendoque eſſe AK ad AM ut z ad l erit AM $\infty\, \frac{lq - lp + lx}{z} + \frac{lky}{zz}$ quare PM ∞ $\infty\, \frac{hy - lq + lp - lx}{z} - \frac{lky}{zz}$, ſive

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{hyz - lqz + lpz - lxz - lky}{zz} & \text{PM} \\ \frac{gfy + gpz - gxz - eyz}{zz} & \text{PF} \\ \frac{cyz - dby + dxz}{zz} & \text{PG} \\ y & \text{PL} \end{array}\right\} \text{add.}$$

$$zzy + hyz - lky + gfy - lzx - gzx - lqz + lpz + gpz \;\infty\; azz \\ - eyz + cyz - dby + dzx$$

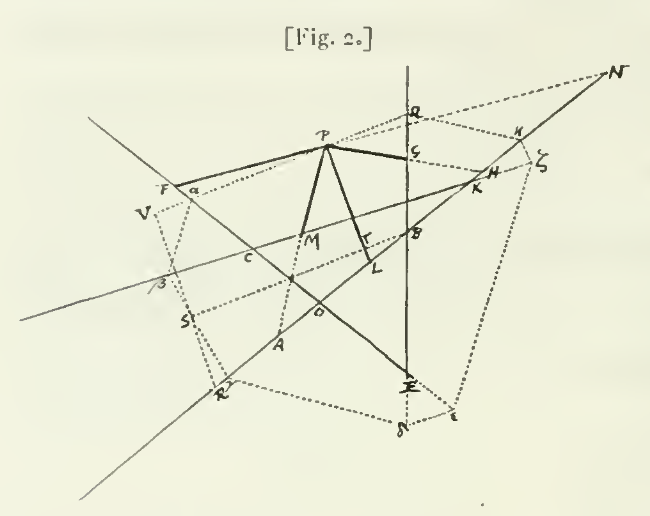
$$\left.\begin{array}{l} zz + hz - lk \\ + gf - ez + cz - db \end{array}\right\} y \;\infty\; \left.\begin{array}{l} lz + gz \\ - dz \end{array}\right\} x + azz + lqz - lpz - gpz$$

$y \;\infty\; \dfrac{\left.\begin{array}{l} lz + gz \\ - dz \end{array}\right\} x + azz + lqz - lpz - gpz}{zz + hz - lk + gf - ez + cz - db}$. Jam id quod in x ductum eſt, vocetur

& altera ducta aequale ei, quod data, & alia ducta; & reliquis continetur punctum similiter rectam lineam positione datam continget." Ce dernier problème fut traité par v. Schooten et par Fermat respectivement aux pages 243—247 et 24—27 (éd. de Tannery et Henry T. I) des ouvrages cités dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent.

$\frac{n}{z}$. et reliquae quantitates cognitae vocentur m ergo LP $y \infty + \frac{nx}{z} + m$. Signa quidem affectionis quae hic utraque ſunt $+$ poſſunt diverſimode variare. Sed ſemper patebit punctum quaeſitum eſſe ad lineam rectam; Et inventis quidem quantitatibus $\frac{n}{z}$ et m, facilis erit conſtructio, et parum diverſa ab ea quam ſubjungam quae ad hunc caſum accommodata eſt.

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

Sumatur BR $\infty\, z$, et ducatur RSV in angulo dato PLH. Sit RS $\infty\, n$ et SV $\infty\, m$, junctâque SB ducatur huic parallela VQ. Erit haec VQ linea ad quam eſt punctum quaeſitum P. Verum oportebit punctum P ſumere intra angulum linearum FE, QE.

Ratio autem compoſitionis manifeſta eſt, nam quum BR ſit z, RS $\infty\, n$ et BL $\infty\, x$ erit LT $\infty \frac{nx}{z}$. et quum SV ideoque et TP ſit m, erit LP $\infty \frac{nx}{z} + m$, ut oportebat.

Et ſi linea a, cui omnes ductos lineas aequales eſſe oportet, major vel minor quam nunc eſt data ſit, conſtat ex aequatione eo tantum immutari quantitatem m, id eſt SV, adeo ut punctum quaeſitum futurum ſit ad aliam lineam, ſed quae ipſi VQ parallela futura ſit, quod omninò notandum eſt.

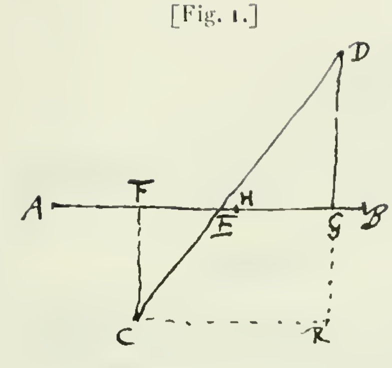
Quemadmodum locus puncti P inventus eſt linea αQ, ita ſi quaeratur hoc punctum inter alium angulum ut KCE, invenietur locus ejus alia linea $\varepsilon\zeta$ et aliae adhuc intra reliquos angulos; adeo ut dicendum ſit locum puncti P eſſe ambitum figurae octangulae α Q $\eta\, \zeta\, \varepsilon\, \delta\, \lambda\, \beta$: Quum omnia hujus ambitus puncta propoſito ſatisfaciant. datâ autem linea a majore vel minore, erit puncti locus alia figura polygona, cujus latera lateribus hujuſce figurae parallela erunt, quod conſtat ex ante dictis. [3])

[3]) Il semble que Huygens n'a pas remarqué le cas où le segment αQ se trouverait tout entier ou en partie dans l'intérieur du quadrilatère formé par les lignes CO, OB, BG et KC, auquel cas le segment entier ou la partie en question doit être rejetée comme solution du problème tel qu'il a été conçu par Huygens.

XI.[1])

[1650].

[Fig. 1.]



Datâ positione lineâ recta terminatâ AB et puncto C, invenire punctum D, ita ut junctâ CD, fiat rectangulum AEB aequale rectangulo CED. [1])

Esto AH vel HB ∞ a
HF ∞ b
perp. FC ∞ c
HG ∞ x
perpd. DG ∞ y [2])

FC + GD $(c+y)$ ad FC (c) ut FH + HG $(b+x)$ ad FE $\left(\frac{cb+cx}{c+y}\right)$

FC + GD $(c+y)$ ad GD (y) ut FG $(b+x)$ ad EG $\left(\frac{by+xy}{c+y}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\square\,\text{FG}\;bb+2bx+xx\\ \square\,\text{DR}\;cc+2cy+yy\end{array}\right\}\square\,\text{CD}$$

$$\square\,\text{CE}+\square\,\text{ED}\;\frac{ccbb+2ccbx+ccxx+bbyy+2bxyy+xxyy}{cc+2cy+yy}+cc+yy \quad \text{fubtr.}$$

$$\text{m[ult.]}\left\{\begin{array}{l}\text{AE}\;a-b+\frac{cb+cx}{c+y}\\ \text{2EB}\;2a+2b-\frac{2cb+2cx}{c+y}\end{array}\right.$$

$$\overline{2\,\square\,\text{AEB}}$$

---

[1]) La pièce occupe les pages 162 et 163 du manuscrit N°. 12.

[2]) Après coup Huygens ajouta en marge: „melius posuissem AF ∞ a; FB ∞ b; FC ∞ c; FG ∞ x; GD ∞ y.

$$2 \square \text{CED} \; \frac{2c^3y + 2cbby + 4bcxy + 2cxxy + 4ccyy + 2cy^3}{cc + 2cy + yy} \infty$$

$$\infty\,^{3)}\; \frac{2aacc + 4aacy + 2aayy - 2bbyy + 4bcxy - 2ccxy}{cc + 2cy + yy}$$

$$2c^3y + 2cbby + 2cxxy + 4ccyy + 2cy^3 \infty 2aacc + 4aacy + 2aayy - 2bbyy - 2c^2x^2$$
$$c^3y + cbby + cxxy + 2ccyy + cy^3 + bbyy + ccxx \infty aacc + 2aacy + aayy$$

dividendo utrinque per $c + y$ fit

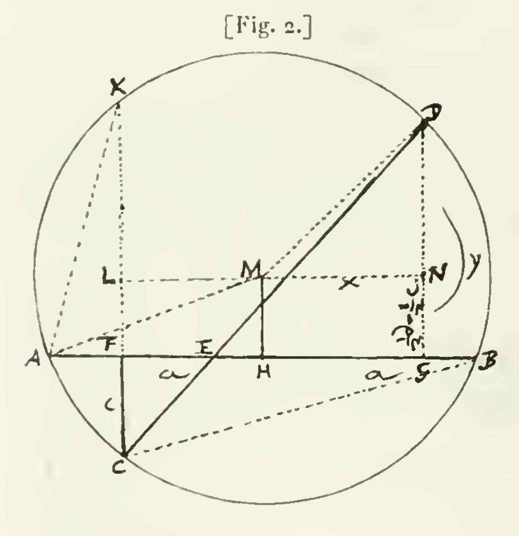
$$ccy + cxx + cyy + bby \infty aac + aay$$
$$cyy \infty aay - ccy - bby + aac - cxx$$
$$yy \infty \frac{aay - bby}{c} - cy + aa - xx$$

Sit c ad $a + b$ ut $a - b$ ad d. Erit $yy \infty dy - cy + aa - xx$

$$y \infty \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - dc\,^{4)} + \tfrac{1}{4}cc + aa - xx}$$

Hinc apparet punctum D esse ad circuli circumferentiam, Eritque constructio hujusmodi.

[Fig. 2.]



CONSTR.

Tribus CF, FB, AF, inveniatur quarta proportionalis FK quae erit d sive $\frac{aa - bb}{c}$. totâque KC bifariam divisâ in L, erit LF $\infty \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}c$. et posita perpendiculari HM ∞ LF, ductâque AM, erit haec $\infty \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - dc\,^{4)} + \tfrac{1}{4}cc + aa}$. descripto igitur circulo AKDB, centro M, radio MA, si sumatur in ejus circumferentia aliquod punctum ut D unde ducta secet lineam AB, manifestum est hoc problemati satisfacere, nam quum HG vel MN sit x et MD $\square \infty \tfrac{1}{4}dd - dc\,^{4)} + \tfrac{1}{4}cc + aa$, erit ND ∞

³) Huygens égale ici $2 \square \text{CED} = (\text{CE} + \text{ED})^2 - (\text{CE}^2 + \text{ED}^2) = \text{CD}^2 - (\text{CE}^2 + \text{ED}^2) = \text{FG}^2 + \text{DR}^2 - (\text{CE}^2 + \text{ED}^2)$ à $2 \square \text{AEB} = \text{AE} \times 2\,\text{EB}$.

⁴) Lisez $\tfrac{1}{2}dc$.

$\infty \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - dc}$ [4] $+ \tfrac{1}{4}cc + aa - xx$ et DG $\infty\ \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}c + \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - dc}$ [4] $+ \tfrac{1}{4}cc + aa - xx$ ut oportebat. Sumptâ autem x majore quam a erit $y \infty\ \tfrac{1}{2}d - \tfrac{1}{2}c$ χ [5] χ $\sqrt{\tfrac{1}{4}dd - dc}$ [4] $+ \tfrac{1}{4}cc + aa - xx$. Quum autem fecerimus ſicut CF ad FB ita AF ad FK, apparet triangula CFB, AFK eſſe ſimilia; atque ideo angulos CBA, CKA aequales. Sunt itaque quatuor puncta K, A, C, B in eadem circumferentia circuli; L autem eſt medium KL, [6] et H medium AB; igitur centrum circuli ad quem ſunt puncta K, A, C, B, neceſſario eſt in interſectione perpendicularium LM, HM, quae eſt M. Igitur conſtat punctum C eſſe ad circuli circumferentiam quem deſcripsimus centro M per punctum A. Adeo ut ad conſtructionem hujus problematis tantum ſit opus deſcribere circulum per tria puncta A, C, B, quae data ſunt. Idem autem colligitur ex prop. 35. lib. 3. Elem. [7] [Euclid.]

---

[5]) Consultez sur le signe χ la note 5 de la page 230.

[6]) Lisez KC.

[7]) Voir la page 307 de l'ouvrage mentionné dans la note 10, p. 97 du Tome présent, où on lit: „Si in circulo duae rectae lineae sese mutuo secuerint, rectangulum comprehensum sub segmentis vnius, aequale est ei, quod sub segmentis alterius comprehenditur. rectangulo."

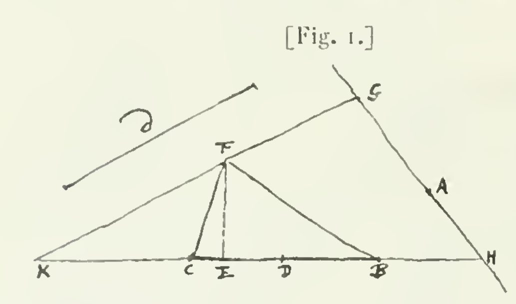
XII.[1]

[1650].

Ex Pappo, lib. 7[2]).

Datis positione duobus punctis C, *B et linea HG, et in eâ puncto A, invenire punctum F, unde si ducantur FC, FB ad data puncta, et FG ad datam lineam in dato angulo FGH; sint quadrata linearum FC, FB, aequalia rectangulo quod continetur abscissâ GA ad datum punctum, et aliâ lineâ* d.

[Fig. 1.]



Factum jam sit atque à puncto F, ducantur FC, FB, FG, quarum haec producta conveniat cum producta BC in K; et GH in H.

Sit DC vel DB ∞ a; DH ∞ b; HA ∞ c; DE ∞ x; EF ∞ y.

Quia autem linea GH positione data est datus est quoque angulus KHG; sed et angulus FGH datus est, igitur triangulum KHG specie datum, et data proportio lineae KH ad HG, quae sit ut z ad

---

[1]) La pièce occupe les pages 164 et 165 du manuscrit N°. 12.

[2]) Voir la page 163 recto de l'édition de Commandin, mentionnée, dans la note 4, p. 213 du Tome présent, où on lit, dans l'aperçu des „lieux plans" d'Apollonius: „Si à duobus punctis datis inflectantur rectae lineae; à puncto autem ad positione ductam lineam abscissa à recta linea positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis aequales ei, quod à data, & abscissa continetur, punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget." A cet énoncé très obscur van Schooten a donné la même interprétation qu'on trouve ici; voir la page 281 (XII Problema) de l'ouvrage cité dans la note 9, p. 214 du Tome présent. L'interprétation de Fermat est plus bornée; voir la page 48 du T. I de l'édition de

f; item FE ad EK quae sit ut z ad e. Ergo erit EK $\infty \frac{ey}{z}$, et tota KH $\infty \frac{ey}{z} +$ $+ x + b$.

$$z \text{ ad } f \text{ ut KH} \left(\frac{ey}{z} + x + b\right) \text{ ad HG } \frac{fey}{z} + fx + fb \Big| \text{ f[uber.].}$$
$$\text{AH} \quad \frac{z}{c}$$

$$\text{ad.} \begin{cases} \square \text{CF } aa - 2ax + xx + yy \\ \square \text{BF } aa + 2ax + xx + yy \end{cases} \qquad \frac{fey + fxz + fbz - czz}{zz} \text{ AG} \Big| \text{ m[ult.].}$$
$$d \qquad \text{lin. } d$$

$$2aa + 2xx + 2yy \infty \frac{dfey + dfxz + dfbz - dczz}{zz}$$

$$2yy \infty \frac{dfey + dfxz + dfbz - dczz - 2aazz - 2xxzz}{zz}$$

Ponendo autem quod hic licitum est $z \infty d$ fiet

$$yy \infty \frac{\frac{1}{2}fey}{z} - xx + \tfrac{1}{2}fx + \tfrac{1}{2}bf - aa - \tfrac{1}{2}cz$$

deme et adde $\frac{1}{16}ff$ fit

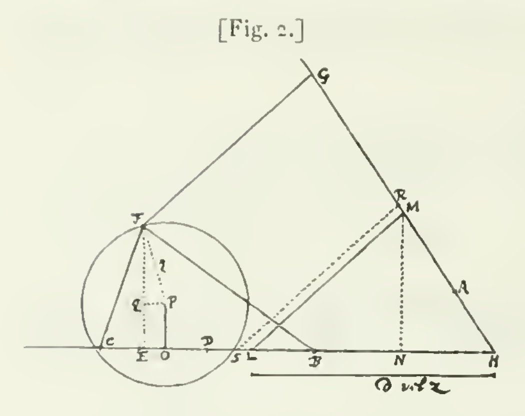
$$yy \infty \frac{\frac{1}{2}fey}{z} - \underbrace{xx + \tfrac{1}{2}fx - \tfrac{1}{16}ff}_{\square} + \tfrac{1}{16}ff + \tfrac{1}{2}bf - aa - \tfrac{1}{2}cz$$

$$\text{sit } \tfrac{1}{16}\frac{ffee}{zz} + \tfrac{1}{16}ff + \tfrac{1}{2}bf - aa - \tfrac{1}{2}cz \infty qq$$

$$\text{Ergo } y \infty \tfrac{1}{4}\frac{fe}{z} + \sqrt{qq - \underbrace{xx + \tfrac{1}{2}fx - \tfrac{1}{16}ff}_{\square}}$$

Tannery et de Henry, citée dans la note 11 p. 214 du Tome présent. Tannery dans la note 1 de la même page 48 accepta la version de Huygens et van Schooten. Simson de même; voir les pages 183—193 de l'ouvrage, cité dans la note 2, p. 229 du Tome présent; comme aussi Hultsch au lieu cité dans la note 17, p. 215; à cette exception seulement qu'ils donnent à l'expression „species" le sens plus large que nous avons indiqué dans la note 2 de la p. 229.

[Fig. 2.]



CONSTRUCTIO.

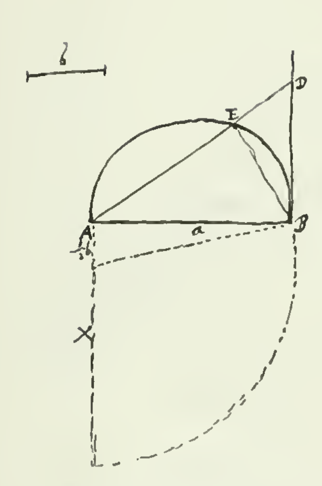
Sumatur HL ∞ d, et ducatur LM ad HG in angulo dato, erit ergo HM ∞ f. inveniatur tribus MN, NL, z quarta proportionalis HS, quae erit e, et ducatur SR parall. LM, eritque HR $\frac{fe}{z}$. Pone jam DO aequ. $\frac{1}{4}$ HM, et perpd. OP ∞ $\frac{1}{4}$ HR; centroque P, femidiametro q (quae prius inveniri debet) fcribe circulum PF. Hujus enim circumferentia erit locus puncti quaefiti F. Nam fi fumatur DE ∞ x, erit EO $x - \frac{1}{4}f$ vel etiam PQ; quare FQ ∞ ∞ $\sqrt{qq - xx + \frac{1}{2}fx - \frac{1}{16}ff}$ et quum fit PO vel QE ∞ $\frac{1}{4}\frac{fe}{z}$ erit FE five $y \infty \frac{1}{4}\frac{fe}{z} +$ $+ \sqrt{qq - xx + \frac{1}{2}fx - \frac{1}{16}ff}$ ut oportebat.

Determ. Oportet $\frac{1}{16}\frac{ffee}{zz} + \frac{1}{16}ff + \frac{1}{2}bf$ majores effe quam $aa + \frac{1}{2}cz$.

XIII. [1])

[1650].

Ex Pappo lib. 7. [2])



Dato semicirculo AEB, quem contingit BD ad B, aptare inter circumferentiam et lineam BD, rectam DE datae longitudinis, quaeque pertineat ad angulum A. [3])

Sit data longitudo b et AB ∞ a, AD ∞ x.

AD (x) —— AB (a) —— AB (a) ——

—— AE $\left(\frac{aa}{x}\right)$ ad[de].
ED (b)

$$\text{AD}\; x \infty \frac{aa}{x} + b\; \text{AD}$$

$$xx \infty aa + xb$$

$$x \infty \tfrac{1}{2}b + \sqrt{\tfrac{1}{4}bb + aa}$$ [4])

---

[1]) La pièce se trouve à la page 166 du manuscrit N°. 12.

[2]) Voir la page 163 verso de l'édition de Commandin cité p. 259, T. II, note 3, où on lit dans l'aperçu des „inclinaisons" d'Apollonius: „Positione dato semicirculo, & recta linea ad rectos angulos basi..... inter duas lineas ponere rectam lineam magnitudine datam, quae ad semicirculi angulum pertingat."

[3]) Comme on le voit, Huygens ne traite qu'un cas particulier du problème plus général formulé dans la note précédente, où la droite BD, tangente ici au demi-cercle AEB, est une droite quelconque perpendiculaire à la ligne AB. Une solution très élégante de ce problème a été donné par Ghetaldi, p. 4—15 de l'ouvrage cité en premier lieu dans la note 5 de la page 126 du T. VIII. Le cas particulier, dont il s'agit ici, y est traité à la page 15.

Huygens d'ailleurs a tâché plus tard de généraliser d'une autre manière le problème dont il donne ici la solution; mais il s'est aperçu qu'il avait affaire alors à un problème solide. Voir l'Appendice à la pièce présente.

[4]) Consultez la construction indiquée dans la figure.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{1}{2}bb + aa + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa} & \square\ xx \text{ vel AD} \\ aa & \square\ \text{AB} \end{array}\right\} \text{f.}$$

$$\frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa} \qquad \square\ \text{DB}$$

Posito autem DB ∞ y, pervenitur ad aequationem hujusmodi, $y^4 \infty yybb + + aabb$. [5]) Quum igitur hic invenerimus esse $yy \infty \frac{1}{2}bb + b\sqrt{\frac{1}{4}bb + aa}$, apparet omnia problemata ubi x^4 aequatur $qqxx + qqcc$, plana esse. [6])

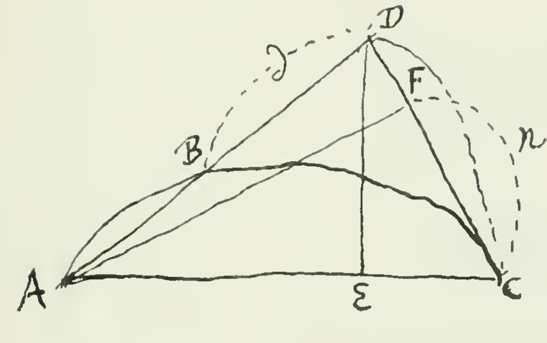
---

[5]) On a alors, en effet, AD = BD² : DE = $y^2 : b$; donc $y^4 : b^2$ = AB² + BD² = $a^2 + y^2$.

[6]) C'est-à-dire construisible par la règle et le compas. Il est curieux d'observer comment cette remarque, si évidente du point de vue algébrique, a pu paraître comme ayant quelque importance à Huygens, qui se plaçait au point de vue purement géométrique. Huygens d'ailleurs ne s'était encore occupé sérieusement de problèmes solides, auxquels il s'appliquera assidûment deux années plus tard. Voir les „Travaux mathématiques divers de 1652 et 1653."

APPENDICE A LA PIÈCE N°. XIII.[1]

[1670].



Dato circuli ſegmento ABC et tangente in C, ducere ex A rectam ABD ita ut intercepta BD ſit aequalis datae.

AC ∞ a; BD ∞ d; AF perpend. CD; CF ∞ n; DE perpend. AC.

BD (d) — DC (x) ——— DC (x) — AD $\left(\frac{xx}{d}\right)$

AC (a) — CF (n) ——— DC (x) — EC $\left(\frac{nx}{a}\right)$

$$xx - \frac{nnxx}{aa} \text{ qu. DE}$$

$$a - \frac{nx}{a} \text{AE} \qquad aa - 2nx + \frac{nnxx}{aa} \text{ qu. EA} \qquad \text{add.}$$

$$xx + aa - 2nx \infty \frac{x^4}{dd}$$

[1]) Cet Appendice est emprunté aux pages 262 et 263 du Livre des „Adversaria D". D'après la place qu'il occupe il doit dater de 1670. En outre de ce que nous donnons on y trouve encore d'autres figures et calculs moins achevés qui se rapportent au même problème.

$$0 \infty x^4 - ddxx + 2ddnx - ddaa$$

$$x^4 \infty ddxx - 2ddnx + ddaa$$

$$x^4 \infty ddxx - 2nx + \frac{aa}{d}$$ [2])

Si $n \infty 0$ hoc eſt ſi ABC ſit ſemicirc. erit problema planum. [3])

$$x^4 \infty ddxx + ddaa$$

$$xx \infty \tfrac{1}{2}dd + \sqrt{\tfrac{1}{4}d^4 + ddaa}$$

x [4])

[2]) Réduction fautive, dont le sens nous échappe.

[3]) Consultez la pièce XIII qui précède.

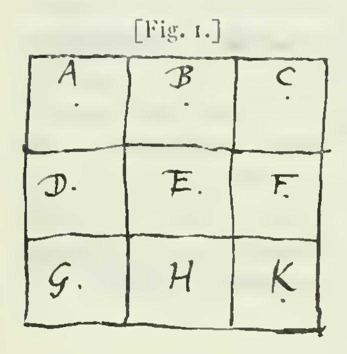
[4]) Huygens n'achève pas le calcul et n'indique pas la construction.

XIV.[1]

[1650].

Tabulam omnimodae aequalitatis constituere.[2])

[Fig. 1.]



Datus sit numerus $a \infty 18$, cui ternos quosque hujus tabulae aequales esse oporteat.

Ponatur numerus in A ∞x, in B ∞y, in E ∞z. Ergo C $\infty a - x - y$, et K $\infty a - x - z$, et H $\infty a - y - z$. et quia C + E + G sunt aequales a, erit G $\infty a - a + x + y - z$. et quoniam K + + H + G quoque sunt aequales a, erit idem G $\infty 2z + + x + y - a$, (quod invenitur auferendo H + K ex a) igitur $x + y - z \infty 2z + x + y - a$; $a \infty 3z$; $\frac{1}{3}a \infty z$ sive E; medius igitur numerus aequalis debet esse tertiae parti numeri dati, unde jam porro reliquos invenire non erat difficile. Nam quum z sit $\frac{1}{3}a$, erit K (qui ante erat $a - x - z$) aequalis $\frac{2}{3}a - x$. et ideo F $\infty 2x + y - \frac{2}{3}a$; et D $\infty \frac{4}{3}a - 2x - y$, et G $\infty x + y - \frac{1}{3}a$, et denique H $\infty \frac{2}{3}a - y$.

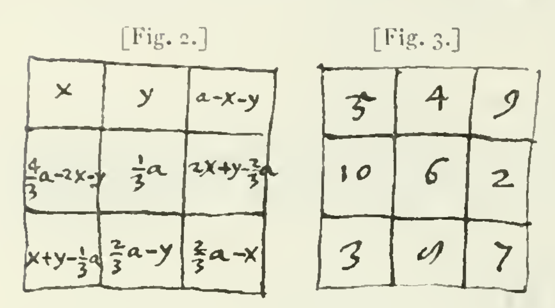
---

[1]) La pièce se trouve aux pages 167 et 168 du manuscrit N°. 12.

[2]) On peut consulter sur l'histoire des carrés magiques les pages 188—270 de l'ouvrage suivant de S. Günther: „Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften." Leipzig, Teubner, 1876. On remarquera toutefois que la conception du carré magique, telle qu'on la trouve formulée ici, diffère, sur un point essentiel, de la conception usuelle qui exige qu'on dispose dans le carré les nombres consécutifs depuis l'unité jusqu' à un nombre carré donné. Cependant, dans l'ouvrage de Bachet „Problemes plaisans et delectables qui se font par les nombres. Lyon. Pierre Rigaud. MDCXXIIII," très répandu à l'époque (une première édition parut en 1612), on trouve aussi d'autres carrés magiques dont les nombres constituent une progression arithmétique.

Nous ne savons pas si le jeune Huygens a connu cet ouvrage.

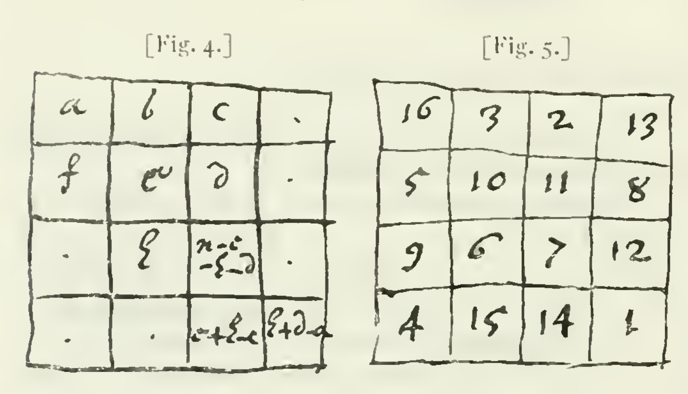
Poſſunt igitur numeri A et B id eſt x et y pro lubitu aſſumi dummodo obſervetur ne aliquibus locis habeatur defectus alicujus numeri, puta ne $2x + y$ minor ſit quam $\frac{2}{3}a$, alias enim numerus F eſſet minor nihilo. [3])



[Fig. 2.] [Fig. 3.]

Videndum etiam ne idem numerus bis ponatur.

datis ſexdecim locis, invenietur numeros quatuor medios aequales eſſe debere numero dato, et praeter eos adhuc quatuor alios ad lubitum ſumi poſſe, adeo ut ſeptem numeri aſſumendi ſint a, b, c, f, e, d, h, poſitoque numero dato ∞ n erit quartus mediorum $n - e - h - d$. et reliquorum omnium quantitates per haec determinatae erunt.



[Fig. 4.] [Fig. 5.]

Verum magna difficultas eſt in numeris ita diſponendis ut nuſquam idem recurrat, ſicuti in tabula hic appoſita obſervatum videmus [4]), ubi numerus datus eſt 34. Quae tamen difficultas eò minor erit, quò numerus datus erit major.

---

[3]) Chez Bachet, p. 165, on trouve le carré

5	10	3
4	6	8
9	2	7

. Comparez le carré du texte.

[4]) D'après S. Günther, p. 215 et 216, on rencontre ce même carré magique sur l'estampe bien connue d'Albrecht Dürer, qui répresénte la Mélancolie et qui date probablement de l'année 1514.

Bachet, p. 167, construit avec les seize premiers nombres le carré suivant:

4	14	15	1
9	7	6	12
5	11	10	8
16	2	3	13

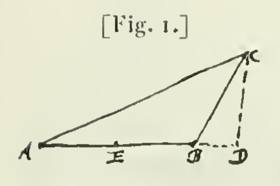
XV.[1]

[1650.]

Monitu Bellekomij [2]).

Datâ lineâ AB oportet inflectere ACB ita ut qu. AB una cum duplo quadrato BC sit aequale quadrato AC.

[Fig. 1.]



Sit AE vel EB ∞ a; ED ∞ x; DC ∞ y.

ad. $\begin{cases} 2 \square \mathrm{BC}\ 2xx - 4ax + 2aa + 2yy \\ \square \mathrm{AB} \qquad\qquad\qquad 4aa \end{cases}$

$2xx - 4ax + 6aa + 2yy \infty xx + 2ax + aa + yy$ □ AC

$xx - 6ax + 5aa \infty -yy$

$yy \infty -5aa - xx + 6ax$ adde et deme $9aa$

$yy \infty +4aa \underbrace{-xx + 6ax - 9aa}_{-\square}$

---

[1]) La pièce se trouve à la page 169 du manuscrit N°. 12.

[2]) Andreas van Berlikom, secrétaire de la ville de Rotterdam, probablement le fils de Boudewyn van Berlikom, natif de Bois-le-Duc, lequel vécut jusqu' après 1601 à la Haye.

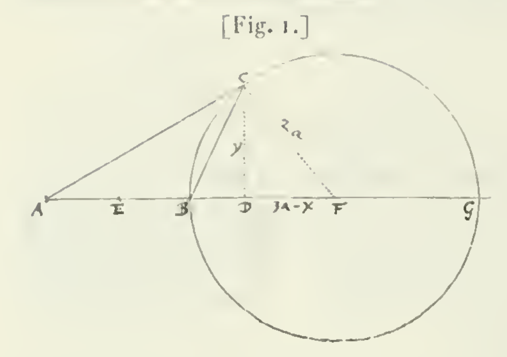
Andreas publia l'ouvrage suivant: Andreas van Berlikom, Elementorum libri XII de rerum naturalium gravitate, pondere, impulsu, motu, loco et motuum et actionum causis, rationibus ac modis. Roterodami 1654 in-4°.

Au livre *K* des Adversaria, Huygens semble citer un autre ouvrage. On y lit ce qui suit:

Ex tractatu Berlekomii Secret. Roterod. de Refractionibus et radiis in unum punctum cogendis.

Radius est corpusculum vel corpuscula minima lucida et subtilissima actione

[Fig. 1.]

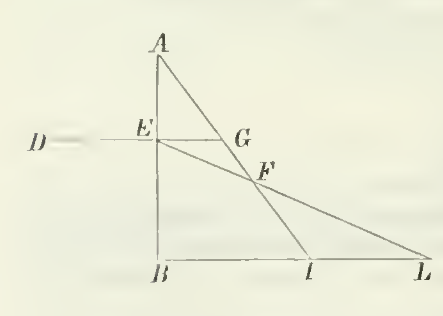


CONSTRUCTIO.

Sit BF ∞ AB, et centro F, femidiametro FB defcribatur circulus FBC, eritque ejus circumferentia locus puncti C. Nam EF eft $3a$ et ED ∞ x, quare DF ∞ $3a - x$; et FC eft $2a$: Ergo DC ∞ $\sqrt{4aa - xx + 6ax - 9aa}$ ut oportebat.

---

intima lucis in ipso corpore luminaris subruta, et e luminari exsilientia, atque in directum procedentia.



Scribit radium DE perpendiculariter in superficiem AB prismatis ABI incidentem ibi statim refringi et non in altera AI, adeo ut recta deinceps perget secundum EL. Negat autem ad G pervenire ibique refringi. Putatque sententiam suam accurate observatione confirmatum iri. Hinc Cartesii methodum exquirendae refractionis rejecit et omnem ejus Dioptricam.

Alio modo lineam quae parallelos radios ad punctum cogat invenire conatur. lentem concavam ad lentem sphaericam in ipso concursus puncto collocandam scribit.

ad lentem hyperbolycam autem nulla concava opus est.

Quae omnia absurda et inepta.

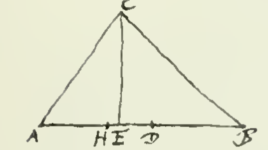
XVI.[1]

[1650].

Ex Pappo.[2]

Datis positione punctis A et B, inflectere ACB ita ut quadratum AC, una cum quadrato AB habeat ad quadratum CB rationem datam quam DA habet ad DH.

[Fig. 1.]



Sit AD vel DB ∞ a, DE ∞ x, EC ∞ y. et [D]H ∞ b.

a[dde]. $\begin{cases} \square \text{ AC } aa - 2ax + xx + yy \\ \square \text{ AB } 4aa \end{cases}$

$\square$CB $aa + 2ax + xx + yy$ ad $5aa - 2ax + xx + yy$ ut b ad a

$$ayy + a^3 + 2aax + axx \infty 5aab - 2abx + bxx + byy$$

$$ayy - byy \infty 5aab - a^3 + bxx - axx - 2aax - 2bax$$

$$yy \infty \frac{5aab - a^3}{a - b} - xx \frac{- 2aax - 2bax}{a - b} \qquad \text{fit } \frac{aa + ba}{a - b} \infty c$$

---

[1]) La pièce est empruntée à la page 170 du manuscrit N°. 12.

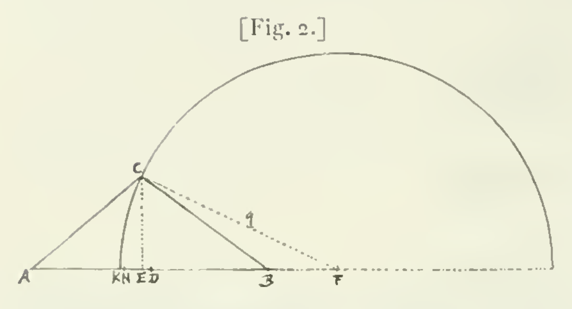
[2]) Il s'agit bien du passage suivant qu'on trouve p. 163 recto de l'édition de Commandin, mentionnée dans la note 4 p. 213 du Tome présent, où on lit dans l'aperçu des „lieux plans" d'Apollonius: „Si à duobus punctis datis rectae lineae inflectantur, & sit quod ab vno efficitur eo, quod ab altera dato major, quàm in proportione punctum positione datam circumferentiam continget." Alors l'interprétation de Huygens diffère légèrement de celle adoptée par van Schooten et Fermat (voir respectivement les pages 271 et 35 (éd. de Tannery et Henry) de leurs ouvrages mentionnés dans les notes 9 et 11 de la p. 214 du Tome présent), comme aussi par Simson (voir la p. 139 de l'ouvrage cité dans la note 2 p. 229 du Tome présent), et par Hultsch (voir la note 17 p. 215). Voir encore la note 5 de la présente pièce.

$$yy \infty \frac{4aab}{a-b} - aa - xx - 2cx \quad \text{adde et deme } cc$$

$$yy \infty \frac{4aab}{a-b} - aa + cc \underbrace{- xx - 2cx - cc}_{-\square} \quad \text{fit } \frac{4aab}{a-b} - aa + cc \infty qq$$

$$yy \infty qq - xx - 2cx - cc$$

[Fig. 2.]



CONSTR.

DF eſt c, ſive $\frac{aa+ba}{a-b}$, nimirum quarta proportion. lineis AH, HB, AD. FK vel FC eſt q. DE eſt x. ergo FE $\infty\ c + x$, et CE ∞ $\infty \sqrt{qq - xx - 2cx - cc}$.

Si vero x ſumatur à D verſus b [3]), reperietur in aequatione $yy \infty qq - xx + 2cx - cc$. [4]) et conſtr.io conſtat. quadratum AC eſt minus quadrato CB, dato quam in ratione. [5])

---

[3]) Lisez B.

[4]) Comparez la note 4 à la p. 230.

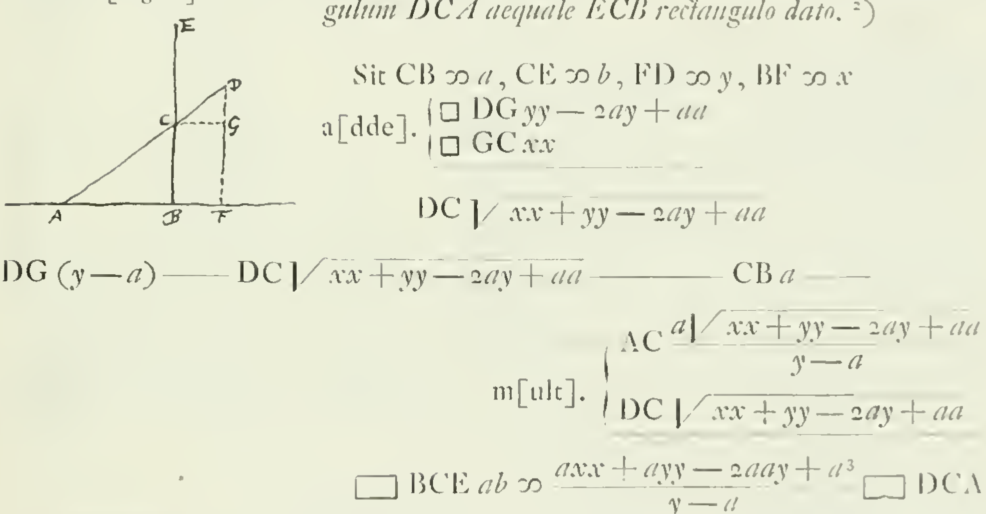
[5]) Après l'achèvement de la pièce Huygens s'est donc aperçu, comme il semble, qu'elle n'est pas tout à fait conforme à l'énoncé de Pappus où il y a „maior" au lieu de „minus". Mais encore, après ce changement elle n'en constitue qu' un cas particulier puisque Huygens a égalé le „datum" au carré de AB.

XVII. [1]

[1650].

Datis positione linea AB et puncto C, invenire punctum D, unde si ducatur recta DCA per punctum C in datam lineam AB, sit rectangulum DCA aequale ECB rectangulo dato. [2])

[Fig. 1.]



Sit CB $\infty\ a$, CE $\infty\ b$, FD $\infty\ y$, BF $\infty\ x$

a[dde]. $\left\{\begin{array}{l} \square \text{ DG } yy - 2ay + aa \\ \square \text{ GC } xx \end{array}\right.$

$$\text{DC } \sqrt{xx + yy - 2ay + aa}$$

$$\text{DG } (y - a) \text{ —— DC } \sqrt{xx + yy - 2ay + aa} \text{ —— CB } a \text{ ——}$$

$$\text{m[ult].} \left\{\begin{array}{l} \text{AC } \dfrac{a\sqrt{xx + yy - 2ay + aa}}{y - a} \\ \text{DC } \sqrt{xx + yy - 2ay + aa} \end{array}\right.$$

$$\square \text{ BCE } ab\ \infty\ \frac{axx + ayy - 2aay + a^3}{y - a}\ \square \text{ DCA}$$

---

[1]) La pièce occupe la page 171 du manuscrit N°. 12.

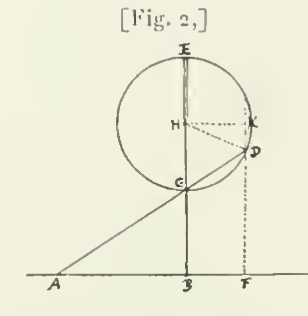
[2]) La solution du problème se trouve déjà indiquée dans l'aperçu des „lieux plans" d'Apollonius par Pappus, où l'on lit à la page 162 recto de la traduction de Commandin: „Si duae lineae" [CA, CD] „agantur,.... ab vno dato puncto" [C].... „in rectam lineam" [ACD]....„datum comprehendentes spacium" [ECB=DCA]: „contingat autem terminus unius" [A] „locum planum" [c'est-à-dire une droite ou un cercle] „positione datum, & alterius terminus" [D] „locum planum positione datum continget, interdum quidem eiusdem generis" [deux cercles ou deux droites] „interdum vero diuersum." Comparez les ouvrages de van Schooten et Fermat, cités dans les notes 9 et 11, p. 214 du Tome présent aux pages 206 et 6 (éd. de Tannery et Henry).

$$aby - aab \infty axx + ayy - 2aay + a^3$$

$$by + 2ay - ab - aa - x^2 \infty yy$$

$\frac{1}{2}b + a$ ♀ [3] $\sqrt{\frac{1}{4}bb - xx} \infty y.$

[Fig. 2,]



CONSTRUCTIO.

Circulus HCD descriptus ad diametrum CE ∞ b est locus puncti D; nam BF vel HK est x, ideoque KD ∞ $\sqrt{\frac{1}{4}bb - xx}$; HB, vel KF $\frac{1}{2}b + a$; ergo FD sive $y \infty \frac{1}{2}b + a - \sqrt{\frac{1}{4}bb - xx}$. ut oportet.

---

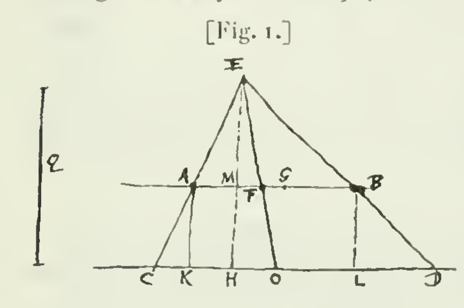
[3]) Voir la note 5 de la p. 230.

XVIII.[1]

[1650].

Datis positione duabus rectis parallelis, et in unâ earum punctis quotcunque, si ab ijs ad punctum unum inflectantur lineae rectae, quae vel secentur ab altera parallelarum, vel productae cum eâ conveniant, sintque quae continentur partibus à puncto ad punctum datum, et ab hoc ad parallelam, dato spatio aequalia, punctum illud continget circumferentiam positione datam.

[Fig. 1.]



Sint datae parallelae AB, CD, et in una earum data puncta A, F, B; Oporteatque invenire punctum E, unde ductis EAC, EFO, EBD, sint tria rectangula EAC, EFO, EBD aequalia spatio quod continetur lineâ tripla AK et Q.

Sit AG vel GB $\infty\ a$; BL, FN[2]) vel AK $\infty\ b$; GF $\infty\ c$; Q $\infty\ d$; GM $\infty\ x$; ME $\infty\ y$.

Rectang. EAC est ad qu. EA ut AC ad EA vel ut MH ad ME.

$$\text{ME}(y) \text{—} \text{MH}(b) \text{—} \square\,\text{EA}\,(aa - 2ax + xx + yy) \text{—} \boxed{}\,\text{EAB}\ \frac{baa - 2bax + bxx + byy}{y}$$

$$\square\,\text{EB}\,(aa + 2ax + xx + yy) \text{—} \boxed{}\,\text{EBD}\ \frac{baa + 2bax + bxx + byy}{y} \quad \text{ad.[de]}$$

$$\square\,\text{EF}\,(xx - 2cx + cc + yy) \text{—} \boxed{}\,\text{EFO}\ \frac{bcc - 2cbx + bxx + byy}{y}$$

[1]) La pièce est empruntée aux pages 172 et 173 du manuscrit N°. 12.

[2]) La ligne FN, perpendiculaire à CD, manque dans la figure. Elle s'y trouvait; mais a été enlevée.

$$3\square\ AK, Q, (3bd) \infty \frac{2baa + bcc - 2cbx + 3bxx + byy}{y} \text{ summa}$$

$$dy \infty \tfrac{2}{3}aa + \tfrac{1}{3}cc - \tfrac{2}{3}cx + xx + yy$$

$$dy - xx + \tfrac{2}{3}cx - \tfrac{1}{3}cc - \tfrac{2}{3}aa \infty yy \text{ et partiendo } \tfrac{1}{3}cc$$

$$dy - \underbrace{xx + \tfrac{2}{3}cx - \tfrac{1}{9}cc} - \tfrac{2}{9}cc - \tfrac{2}{3}aa \infty yy$$

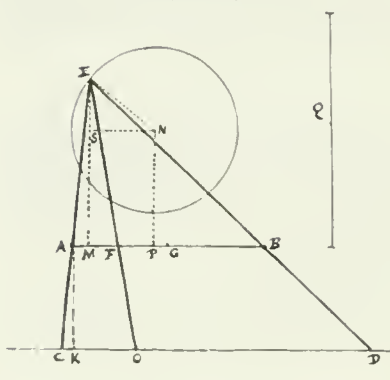
$$- \square \text{ ex } x - \tfrac{1}{3}c$$

$$\tfrac{1}{2}d \pm {}^{3)}\ \sqrt{\tfrac{1}{4}dd - xx + \tfrac{2}{3}cx - \tfrac{1}{9}cc - \tfrac{2}{9}cc - \tfrac{2}{3}aa} \infty y.$$

$$\text{sit } \tfrac{1}{4}dd - \tfrac{2}{9}cc - \tfrac{2}{3}aa \infty qq$$

$$\tfrac{1}{2}d \pm \sqrt{qq - xx + \tfrac{2}{3}cx - \tfrac{1}{9}cc} \infty y$$

[Fig. 2].



CONSTRUCTIO.

GP eſt $\frac{1}{3}$GF. PN $\infty \frac{1}{2}d$ ſive $\frac{1}{2}$Q; NE ∞ q. id eſt $\sqrt{\frac{1}{4}dd - \frac{2}{3}aa - \frac{2}{9}cc}$. circulus ſemidiametro NE, centro N, eſt locus puncti E.

Nam quum GM ſit x, erit PM ſive NS ∞ ∞ $x - \frac{1}{3}c$, et SE $\infty \sqrt{qq - xx + \frac{2}{3}cx - \frac{1}{9}cc}$ et EM $\infty \frac{1}{2}d + \sqrt{qq - xx + \frac{2}{3}bx - \frac{1}{9}cc}$. ut oportebat.

[Fig. 3].

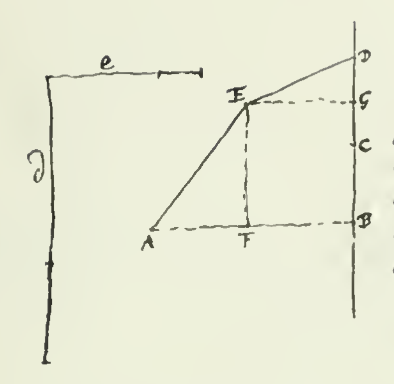
Secundus caſus problematis eſt, quum punctum E quaerimus ab altera parte lineae AFB [4]), ita ut rurſus tria rectangula EAC, EFO, EBD ſint aequalia triplo rectangulo ſub AK et Q. Verum quum hic ad eandem deveniatur aequationem, oportebit ſolummodo repetere ſuperiorem conſtructionem, verùm ad alteram partem lineae AFB.

Determin. $\frac{1}{4}dd$ debet major eſſe quam $\frac{2}{3}aa + \frac{2}{9}cc$. et ſi haec ſint aequalia, locus puncti E erit tantùm ad punctum unicum.

[3]) Voir la note 5 p. 230.
[4]) Voir la Fig. 3.

XIX.[1])

[1650].



Ex Pappo.[2])

Datis positione puncto A et lineâ BD, et in ea puncto C; invenire punctum E, unde si ducatur EA ad datum punctum et ED ad datam lineam in dato angulo EDB; sit rectangulum sub abscissa DC ad datum punctum et sub alia data linea d, *aequale quadrato ex EA.*[3])



[1]) La pièce occupe les pages 174 et 175 du manuscrit N°. 12.

[2]) Sans les renseignements que nous donne la Lettre N°. 93 (p. 141 du T. I) du 13 mai 1651 à Van Schooten, laquelle traite le même problème, il nous aurait été difficile d'indiquer le passage de Pappus visé ici par Huygens. Mais ces renseignements ne laissent pas de doute qu' il s'agit de l'énoncé suivant que nous avons déjà reproduit en partie dans la note 2, p. 237 du Tome présent et qu'on trouve à la page 163 recto de la traduction de Commandin: „Si sit positione „data recta linea, & in ipsa datum punctum, à quo ducatur quaedam linea terminata, à ter- „mino autem ipsius ducatur & ad positionem, & sit quod fit à ducta aequale ei, quod à data. „& abscissa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum punctum datum, vel ad alterum „datum in linea data positione, terminus ipsius positione datam circumferentiam contingere." C'est le cas „vel ad alterum datum [C] in linea [CD] data positione" qui est traité ici; ainsi le premier „datum punctum" de l'énoncé de Pappus est le point A de la figure du texte; AE est la „linea terminata" dont le carré („quod fit") égale le rectangle formé par la droite donnée *d* et le segment CD, découpé sur CD par la ligne ED menée „à termino ipsius [AE]" „& ad positionem", c'est-à-dire dans une direction donnée.

L'interprétation de Huygens de ce passage obscur fut approuvée par van Schooten dans la Lettre N°. 94, p. 144 du T. I. On la retrouve aux pages 267—270 (VI—VIII Problema) de l'ouvrage mentionné dans la note 9 p. 214 du Tome présent. Elle y est précédée toutefois par d'autres interprétations qui mènent à d'autres lieux plans (voir le IV et V Problema, p. 263—266). Voir, sur les interprétations de Fermat, Simson et Hultsch, la note 2 déjà citée, p. 237 du Tome présent.

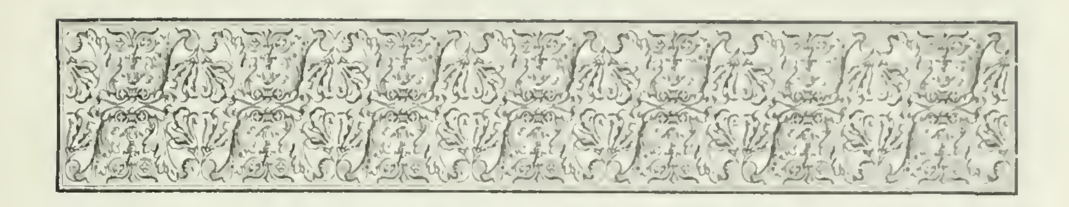
[3]) Nous supprimons l'analyse et la construction qui suivent dans le manuscrit, puisqu' elles ne diffèrent pas sensiblement de celles qu'on trouve dans la Lettre N°. 93, p. 141—142 du T. I.

THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES ELLIPSIS ET CIRCULI

EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO

1651.



Avertissement.

Il n'est pas impossible que, dans l'ordre de la conception, les „Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli, ex dato portionum gravitatis centro" n'aient précédé le traité „De iis quae liquido supernatant." Toutefois, tout pesé, nous supposons plutôt le contraire. [1]) Et puisque, en tout cas, nous ne possédons des „Theoremata" aucun travail préliminaire, mais seulement l'ouvrage imprimé de 1651, nous avons cru devoir les placer ici, après les travaux de 1650.

Tout comme le traité „De iis, etc.", les „Theoremata" furent inspirés bien

[1]) Il est vrai que d'après l'„Ad lectorem", qui va suivre (voir la p. 283 du Tome présent) les „Theoremata" étaient rédigés lorsque Huygens s'appliqua plus assidûment à l'étude de l'ouvrage de Grégoire de St. Vincent (comparez encore la Lettre N°. 96 à Grégoire, p. 147 du T. I) et que cet ouvrage, d'après la Lettre N°. 47b, p. 566 du T. II, lui est parvenu pendant les vacances de Pâques de l'année 1648; mais cette Lettre elle-même prouve, comme nous le montrerons plus loin dans cet „Avertissement" (p. 276), que ce premier examen de la quadrature du cercle de Grégoire n'avait été que superficiel. L'examen plus approfondi, qu'il instituait à propos des „Theoremata" avait donc lieu probablement à une date postérieure, qui ne se laisse indiquer que vaguement à l'aide de la phrase „Mitto itaque Theoremata pauca quae non ita pridem meditatus sum", que l'on rencontre dans la lettre à Golius du 28 décembre 1651 (p. 161 du T. I), laquelle accompagna l'envoi des „Theoremata" et de l'„'Εξέτασις".

En tout cas la date de la conception des „Theoremata" doit être mise bien avant le 20 septembre 1651, lorsque la rédaction définitive fut renvoyée après examen par van Schooten à l'auteur (voir p. 145 du T. I).

probablement par l'étude de l'œuvre d'Archimède, [2]) qui dans son ouvrage „De aequiponderantibus" avait déterminé le centre de gravité du ſegment parabolique. [3]) Ceux des ſegments hyperboliques et elliptiques n'y furent pas traités et Huygens ſe ſera mis à les chercher.

Dans ſa préface il nous raconte lui-même [4]) qu' il parvint d'abord à montrer que chez l'hyperbole la détermination du centre de gravité dépend de la quadrature de cette courbe. Il s'enſuivait que réciproquement l'hyperbole ſe laiſſerait carrer ſi l'on ſavait conſtruire ce centre; mais, comme Huygens nous le déclare, cette relation avec la quadrature de l'hyperbole n'était pas le but, mais ſeulement le réſultat de ſes recherches. [5])

Enſuite il réuſſit à tracer une voie meilleure qui avait l'avantage de réuſſir de même avec les ſegments du cercle et de l'ellipse. En effet, le théorème central [6]) des „Theoremata" eſt valable pour les trois ſegments et la démonſtration eſt donnée pour tous les trois à la fois. Auſſi cette concordance admirable a-t-elle fortement impreſſionné Huygens, comme cela reſſort de ſa préface.

Ce n'était probablement qu' après l'achèvement du petit traité juſqu' au „Theorema VII" inclus, qu'il prit connaiſſance de l'ouvrage de Della Faille, qu'il mentionne avec tant de louanges dans ſa préface [7]) et dans une lettre à Grégoire de St. Vincent du 8 novembre 1651 [8]); ce qui occaſionna l'addition du „Theorema

---

[2]) Les Lettres N°. 107 de décembre 1651 (p. 161 du T. I) à Golius et N°. 117 de janvier 1652 (p. 170 du T. I) à de Sarasa témoignent de l'extrême admiration que le jeune Huygens avait conçue pour Archimède, qu' il estimait au-dessus de tous les autres géomètres; Apollonius venant en second lieu.

[3]) Voir les pages 189—217, T. II de l'édition de Heiberg, citée dans la note 2, p. 50 du Tome présent, ou bien les pages 133—139 du texte Latin de l'édition de Bâle de 1544, Grec et Latin, citée dans la note 1, p. 137 du T. I. C'est à cette dernière édition que nous emprunterons dans la suite nos citations, puisque Huygens probablement s'est servi d'elle ou l'a connue tout au moins. Voir, à ce propos, la Lettre N°. 53, p. 98 du Tome I où l'on doit toutefois remplacer, dans la note 2, l'édition de Rivault, qui ne donne du texte grec que des fragments, par celle que nous venons de nommer.

[4]) Voir la page 283 du Tome présent.

[5]) Voir la même page de l'„Ad lectorem" ou préface, citée dans la note 4.

[6]) Le „Theorema V", p. 297 du Tome présent. Dans ce théorème Huygens apprend à construire un triangle dont le moment par rapport au diamètre de la conique, parallèle à la corde du segment, est égal à celui du segment. Dès lors la dépendance de la détermination des centres de gravité des segments hyperboliques ou elliptiques de la quadrature de l'hyperbole ou du cercle sautait aux yeux.

[7]) Voir la page 285 du Tome présent.

[8]) Voir la page 154 du T. I.

VIII" où le résultat principal[9]) de Della Faille est déduit du „Theorema VII", que nous venons de nommer.

Le 20 septembre 1651 le manuscrit des „Theoremata" fut renvoyé à l'auteur par van Schooten, qui l'avait examiné. [10]) Van Schooten le loua beaucoup et exhorta Huygens de ne pas tarder à le publier. Huygens répondit par la Lettre N°. 97 d'octobre 1651 [11]), dans laquelle il remercia chaleureusement van Schooten de lui avoir indiqué quelques inadvertances dans la „compositio" et „conversio" des rapports. Puis, dans une lettre du 25 octobre [12]), il annonça à Grégoire de St. Vincent, après lui avoir donné un aperçu de ses „Theoremata", sa résolution de les faire paraître simultanément avec la critique de la quadrature de Grégoire.

Le 11 novembre 1651 Huygens attendait chaque jour les figures gravées par van Sichem. [13]) Enfin le 26 décembre des exemplaires de l'ouvrage imprimé, contenant les „Theoremata" et l'„Ἐξέτασις" furent expédiés à Grégoire [14]) et à d'autres savants. [15])

Déjà en 1647 ou au commencement de 1648, pendant son séjour à Bréda, le jeune Huygens fut vivement intrigué par un gros volume qui se trouvait dans la

[9]) Toutefois Huygens a pu connaître ce résultat par la lettre de Mersenne à son père du 12 octobre 1646, où on le trouve exprimé, quoique avec quelque ambiguité; voir la page 23 du T. I. Ajoutons qu' en décembre 1646, d'après l'énumération de ses travaux qu'il transmit à Mersenne dans la lettre, citée p. 4 et 5 du Tome présent, Huygens avait trouvé le centre de gravité du *segment* de cercle (le théorème de Della Faille se rapporte au *secteur*). Peut-on en inférer qu'il était alors en possession de ses „Theoremata" qui traitent les segments? Nous ne le croyons pas, puisque le segment de l'hyperbole n'est pas mentionné; de plus la phrase de la lettre à Golius, citée dans la note 1, semble exclure absolument une date si précoce.

[10]) Voir la page 145 du T. I.

[11]) T. I, p. 148.

[12]) T. I, p. 151.

[13]) Voir la lettre à van Schooten de cette date, p. 156 du T. I.

[14]) Voir la lettre N°. 106, p. 159 du T. I.

[15]) Voici la liste des personnes, qui reçurent à cette occasion, ou plus tard, ce premier ouvrage de Huygens, pour autant qu'on peut reconstruire cette liste au moyen de la correspondance: Grégoire (T. I. p. 160); de Sarasa (p. 160, 169, 170); Della Faille (p. 160, 164, 168, 171); Golius (p. 161); van Schooten (p. 162); Pell (p. 162), Constantyn Huygens, frère (p. 162, 163); van Gutschoven (p. 162, 166); Roberval (p. 162); Seghers (p. 167, 168, 173); Cl. Richardus (p. 168, 171); Tacquet (p. 168, 171); Brereton (p. 176); Hobbes (p. 182); Cavendish (p. 182); Wallis? (p. 182); Carcavy (p. 429, 439, 446, 494); Milon (p. 429); Fermat (p. 439, 446, 494); mais les trois derniers seulement en 1656; les autres en décembre 1651 ou en 1652.

possession du professeur Pell et qui devait contenir, d'après le titre, la quadrature du cercle et des sections coniques; mais le professeur Pell ne le lui voulait „jamais prester, ny en dire une sentence definitive encor qu'il l'ayt eu assez long temps" et de même tous les autres mathématiciens à qui il en avait parlé „se trouvoyent empeschez a en venir à bout, n'osants dire absolument si" l'auteur, Grégoire de St. Vincent, avait „rencontrè la quadrature ou non."

Enfin, pendant les vacances de Pâques, Huygens réussit à avoir le livre et dans sa lettre à Mersenne du 20 avril 1648, [16]) dont nous venons de citer quelques passages, il lui raconte le résultat de l'examen du livre et surtout de la première des quatre quadratures du cercle que Grégoire prétendait avoir données. Toutefois, dans cette lettre, il n'indique pas encore, comme il le fera dans l'„'Εξέτασις" [17]), le lieu exact où le raisonnement, qui conduit à cette quadrature, est irrémédiablement en défaut. [18]) Ensuite, la „Correspondance" ne nous apprend rien sur l'„'Εξέτασις" avant octobre 1651 quand l'échange des lettres avec Grégoire commence. Pour plus d'informations nous renvoyons à cette correspondance [19]) ainsi qu' à celle avec van Schooten [20]) sur le sujet de l'„'Εξέτασις".

[16]) La Lettre N°. 47^b, p. 566 du T. II. On trouve la réponse de Mersenne, du 2 mai 1648, aux pages 89 et 90 du T. I.

[17]) Et aussi dans la Pièce N°. 98 de date incertaine, p. 149 du T. I.

[18]) Dans la lettre mentionnée il cherche la faute dans la „Prop. 43". Or, quoiqu' on pense des démonstrations de Grégoire qui ont mené à cette proposition, la proposition elle même est véritable où elle dit que le rapport des solides RX et R'X', comme aussi celui des solides SV et S'V' est construisible. Comparez l'„Aperçu", qui suit, de la première quadrature du cercle de Grégoire, au § 8, p. 279.

[19]) Comparez la note 13 de l'„Ad Lectorem", p. 286 du Tome présent.

[20]) Voir les lettres N°. 97, d'octobre 1651 (p. 148 du T. I.); N°. 104 du 13 novembre (p. 157 du T. I); N°. 108, du 28 décembre 1651 (p. 162 du T. I.) et N°. 110 du 2 janvier 1652 (p. 163 du T. I).

APERÇU DE LA PREMIÈRE QUADRATURE DU CERCLE DE GRÉGOIRE DE ST. VINCENT.

Nous croyons utile pour faciliter l'intelligence de l'„'Εξέτασις", d'ajouter à cet „Avertissement" un résumé de la quadrature du cercle dont l'„'Εξέτασις" contient la réfutation. Nous l'avons divisé en paragraphes à cause des renvois que nous ferons dans les notes.

1. Nous commençons par la „Prop. 53" (p. 1133) où Grégoire démontre que le cercle sera carrable si l'on peut satisfaire aux deux conditions suivantes:

1°. qu'on sache construire deux arcs de cercle CD et EF, [21]) dont les projections HI et KL sur un même diamètre sont égales et qui soient commensurables entre eux et avec la circonférence du cercle.

2°. qu'on sache construire le rapport des aires CDIH et EFLK. [22])

2. Or, il est facile de montrer que la première condition peut être remplie. Grégoire l'a fait par sa „Prop. 22" (p. 1111) et Huygens en donne un exemple bien simple dans la première figure de son „'Εξέτασις" [23]), où CH = 60°, HE = 30°.

3. Tout dépend donc de la seconde condition, c'est-à-dire, de la détermination du rapport des aires CDIH et EFLK, rapport que Grégoire, dans la „Prop. 52" (p. 1133), remplace par celui des solides GP et G'P' [21]) qu'il obtient en soumettant les paraboles AGNZ et BP'O'Y, dont les sommets se trouvent en A et B, à l'opération qu'il appelle: „ducere planum in planum".

---

[21]) Voir la figure de la page suivante.

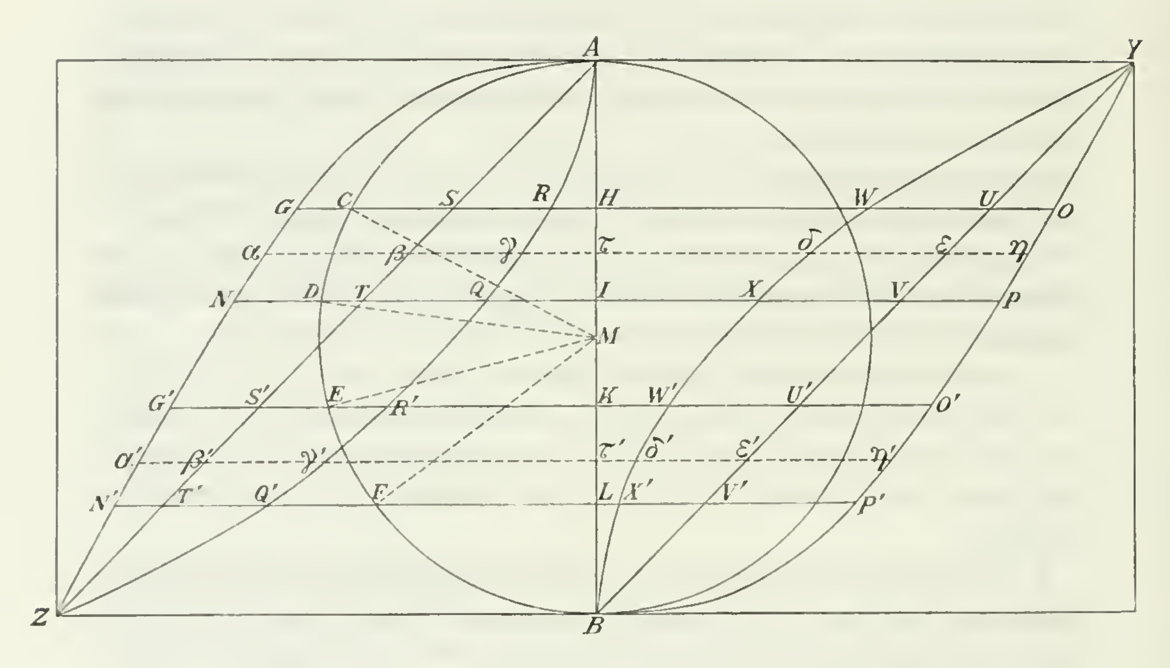
[22]) En effet, ces deux conditions étant remplies, soient $p\sigma$, $q\sigma$, $r\sigma$ les aires du cercle entier et des secteurs DMC, FME (voir toujours la figure de la page suivante), proportionelles respectivement à la circonférence du cercle et aux arcs DC et EF; on aura alors:

$$\frac{\text{aire CDIH}}{\text{aire EFLK}} = \frac{\text{sect. DMC} + \triangle\,\text{CMH} - \triangle\,\text{DMI}}{\text{sect. EMF} + \triangle\,\text{FLM} - \triangle\,\text{EMK}} = \frac{q\sigma + \triangle\,\text{CMH} - \triangle\,\text{DMI}}{r\sigma + \triangle\,\text{FLM} - \triangle\,\text{EMK}} = \frac{m}{n}.$$

Or, cette dernière égalité permet de calculer et de construire la commune mesure σ du cercle et des secteurs et par suite l'aire du cercle lui-même.

[23]) Voir la page 319 du Tome présent.

4. Difons d'abord que cette opération confifte à tourner le carré AZ, avec les lignes qui s'y trouvent, autour de la droite AB jusqu' à ce qu' il foit perpendiculaire au plan du carré BY; à compléter enfuite le rectangle qui a $\tau\alpha$ et $\tau\eta$ pour côtés et enfin à faire mouvoir ce rectangle de forte qu' il demeure perpendiculaire à l'axe AB et que le point τ décrive l'axe AB et les points α et η les courbes ANZ et YPB. Ainsi, pour avoir le folide GP, on doit mouvoir le rectangle $\alpha\eta$ depuis la pofition GO jufqu' à la pofition NP.



5. Pofant alors $AM = MB = r$; $AY = ZB = 2r$; $M\tau = x$; $M\tau' = x'$; on a $\alpha\tau = \sqrt{2r\,(r - x)}$; $\tau\eta = \sqrt{2r\,(r + x)}$ et on trouve pour le volume du folide GP: $2r\int\sqrt{r^2 - x^2}\,dx$, d'où il fuit que ce volume égale celui d'un cylindre droit ayant pour bafe la figure CDIH et pour hauteur AB. C'eft le „Corollarium" de la „Prop. 51" (p. 1132) de Grégoire. [24])

6. Le problème fe réduit donc à celui de conftruire (à l'aide de la règle et du compas) deux lignes qui repréfentent le rapport des folides GP et G'P'. Et Grégoire croit être arrivé à la folution de ce problème par la comparaison des folides

[24]) Inutile de dire que la démonstration de Grégoire est purement géométrique et entièrement à la mode des anciens.

GP et G'P' avec les ſolides SV, S'V', RX et R'X' qu' on obtient en ſoumettant les droites AZ et BY et les paraboles AQZ et BXY, dont les ſommets ſe trouvent en A et en B, à l'opération „ducere planum in planum".

7. Cette ſolution de Grégoire ſe trouve réſumée dans ſa „Prop. 44" (p. 1126), où il prétend:

1°. que le rapport des ſolides RX et R'X' doit contenir autant de fois („toties continere") le rapport des ſolides SV et S'V', que celui-ci contient le rapport des ſolides GP et G'P'.

2°. que le rapport des ſolides RX et R'X' et celui des ſolides SV et S'V' ſont conſtruiſibles.

8. La vérité de la ſeconde aſſertion, pour laquelle il renvoie à la „Prop. 43" (p. 1125), ſe démontre aiſément puisqu' on peut trouver les cubatures des ſolides RX et SV. [25]) Grégoire traite ces cubatures reſpectivement dans la „Prop. 42" (p. 1124) du „Lib. 10" qui nous occupe, et dans la „Prop. 5" (p. 708) du „Lib. 7: De ductu plani in planum", comme le fait auſſi Huygens dans l'„Ἐξέτασις" [26]).

9. Il s'agit donc uniquement encore de vérifier la première aſſertion et de connaître le ſens exact du mot „continere".

Or, en conſidérant les ſolides en question comme des tranches infinement petites d'épaiſſeurs égales, HI = KL, on trouve aiſément:

$$\frac{\text{ſol. RX}}{\text{ſol. R'X'}} = \frac{(r^2 - x^2)^2}{(r^2 - x'^2)^2}; \quad \frac{\text{ſol. SV}}{\text{ſol. S'V'}} = \frac{r^2 - x^2}{r^2 - x'^2}; \quad \frac{\text{ſol. GP}}{\text{ſol. G'P'}} = \frac{\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x'^2}}$$

On a donc:

$$\frac{\text{ſol. RX}}{\text{ſol. R'X'}} = \left(\frac{\text{ſol. SV}}{\text{ſol. S'V'}}\right)^2; \quad \left(\frac{\text{ſol. SV}}{\text{ſol. S'V'}}\right) = \left(\frac{\text{ſol. GP}}{\text{ſol. G'P'}}\right)^2$$

et on peut dire: que le rapport de RX à R'X' contient deux fois le rapport de SV à S'V', et que de même ce dernier rapport contient autant de fois le rapport de GP à G'P' [27]); mais il eſt clair 1°. que cette aſſertion n'eſt plus valable pour des

[25]) Ces cubatures se réduisent respectivement aux intégrales $\int \frac{(r^2 - x^2)^2}{4r^2} dx$ et $\int (r^2 - x^2)\, dx$.

[26]) Voir les pages 329—337 du Tome présent.

[27]) Ces résultats sont démontrés par Grégoire dans les „Prop. 31—34" (p. 1116—1117), c'est-à-dire, non pas pour les tranches infiniment petites, mais pour les sections rectangulaires qui les engendrent; ce qui revient au même.

solides d'épaisseurs finies; 2°. que dans ce dernier cas l'expression „continere" perd sa signification primitive, si simple, et qu' une nouvelle définition devient nécessaire. [28])

10. La première assertion du § 7, qui constitue la „Prop. 40" (p. 1123) de Grégoire, est donc erronée. Elle se fonde sur la „Prop. 39" (p. 1121) dont la démonstration est à peu près incompréhensible [29]); mais qui a la portée suivante: que, si l'assertion en question est vraie pour les solides qui possèdent respectivement les épaisseurs $H\tau = K\tau'$ et $\tau I = \tau' L$, elle l'est alors également pour leurs sommes qui possèdent l'épaisseur $HI = KL$.

C'est dans cette dernière proposition, comme Huygens le signale dans l'„'Εξέτασις", [30]) que réside l'erreur, qui rend vicieuse la quadrature de Grégoire.

---

[28]) En se plaçant au point de vue moderne le choix de la nouvelle définition ne serait pas douteux. Elle exigerait, si la proposition de Grégoire était vraie, l'existence d'une valeur n entière, fractionnaire ou irrationnelle, pour laquelle on aurait à la fois:

$$\frac{\text{sol. RX}}{\text{sol.R'X'}} = \left(\frac{\text{sol. SV}}{\text{sol. S'V'}}\right)^n \text{ et } \left(\frac{\text{sol. SV}}{\text{sol. S'V'}}\right) = \left(\frac{\text{sol. GP}}{\text{sol. G'P'}}\right)^n$$

Ceci amènerait la relation:

$$\frac{\log(\text{RX}:\text{R'X'})}{\log(\text{SV}:\text{S'V'})} = \frac{\log(\text{SV}:\text{SV'})}{\log(\text{GP}:\text{G'P'})};$$

mais il est clair que cette relation n'est pas exacte.

[29]) Comparez la note 8, p. 317 du Tome présent.

[30]) Voir la page 317 du Tome présent.

CHRISTIANI HUGENII, CONST. F.

THEOREMATA DE QUADRATURA HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI,

EX DATO

PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

Quibus subjuncta est

Ἐξέτασις Cyclometriæ Cl. Viri GREGORII à S. VINCENTIO,
editæ Anno cIↃ IↃC XLVII.



LUGD. BATAVOR.
Ex Officina ELSEVIRIANA.

ANNO cIↃ IↃC LI.

AU LECTEUR.[a])

Sur les fections coniques et le cercle nous apportons, Ami Lecteur, quelque chofe de nouveau, au moins fi l'on peut nommer ainfi ce qui, défini et conftitué par une loi éternelle, a toujours été tel qu'il eft maintenant. C'eft ainfi que l'on pourrait appeler de l'or nouveau celui qui a été extrait récemment; des étoiles nouvelles dans le ciel celles qui, inconnues aux fiècles précédents, sont découvertes par l'artifice des nôtres. Et, à vrai dire, à elles aucun Théorème géométrique ne le cède en antiquité, mais nous attribuons la nouveauté à chacun d'eux à mefure qu'ils fe préfentent à nous et deviennent manifeftes. Ainfi on doit dire auffi que la Parabole avant Archimède était une fois et un tiers le triangle infcrit [1]); et d'une vérité non moins immuable étaient inhérentes aux fegments des autres fections coniques et du cercle les propriétés que nous faifons connaître maintenant à leur fujet, quoiqu'il foit certain qu'auparavant elles n'ont été trouvées ou démontrées par perfonne pour autant du moins que quelque chofe en foit parvenue jufqu'à nous. Mais nous ne donnons pas de détermination femblable à celle que nous venons de citer d'Archimède, et la nature même des chofes, après tant de tentatives déjouées des hommes les plus fubtils, ne femble pas avoir laiffé d'efpoir que l'on puiffe jamais attendre quelque chofe de pareil des figures que nous avons entrepris de traiter. Toutefois nous profeffons avoir accompli ce que nous avons exprimé dans le Titre, et quelque chofe de plus, s' il eft permis de prévenir le jugement du Lecteur équitable. Car réduire les Hyperboles, Ellipfes et Cercles à des carrés lorfque les centres de gravité font donnés n'eft pas le but de ces Théorèmes, mais feulement la conféquence, et ils doivent plaire le plus en ceci, qu'ils démontrent jufqu' à certain point un rapport défini de ces trois fegments aux triangles infcrits [2]). Ce rapport me fut acquis le premier dans l'hyperbole par une voie pleinement tracée d'avance, mais encombrée et difficile [3]), et ce fut en cherchant une route plus courte que je tombai fur celle qui conviendrait auffi à l'Ellipfe et au Cercle, et à propos fe préfenta la conftante et admirable conformité dans les figures de même famille.

Ce qui fait qu'elle n'a pas lieu univerfellement dans toutes, c'eft la feule dernière Propofition [4]), furnuméraire pour ainfi dire, et ajoutée en dehors de ce que

[a]) Dans cette traduction on a tâché de reproduire aussi textuellement que possible l'original latin.

AD LECTOREM.

De Conicis Sectionibus & Circulo novi quid adferimus, Amice Lector, ſi tamen ita vocari queat, quod æternâ lege definitum conſtitutumque, quale nunc eſt, perpetuò fuit. Sic quod recens effoditur, novum quis aurum dicat. Sic ſtellas in cœlo novas, quæ ſuperioribus ſæculis incognitae, noſtrorum artificio deteguntur. Neque verò his Geometricum Theorema ullum vetuſtate cedit, ſed nos novitatem ſingulis tribuimus, prout quæque ſeſe nobis offerunt ſiuntque manifeſta. Itaque & inſcripti trigoni Parabola ante Archimedem ſeſquitertia [1]) fuiſſe dicenda eſt; neque illa minùs immutabili veritate reliquarum Sectionum Circulique portionibus ſemper inerant, quæ nunc circa eas prodimus, licet antehac nemini de quo quidem ad nos pervenerit, comperta fuiſſe conſtet vel determinata. Damus autem non iſti quam retulimus, Archimedeæ ſimilem determinationem, neque vel ipſa rerum natura, poſt tot ſubtiliſsimorum hominum deluſos conatus, ſpem reliquiſſe videtur tale quid unquam de figuris, quas tractandas ſumpſimus, expectandi: Verùm id præſtitiſſe profitemur, quod in ipſa quoque inscriptione expreſſum eſt, & paulò quid amplius, ſi lectoris æqui judicium prævenire permittitur. Namque ex datis gravitatum centris Hyperbolas, Ellipſes & Circulos ad quadrata redigere non finis eſt horum Theorematum, ſed conſequentia duntaxat; eoque nomine potiſsimum placere debent, quòd aliquatenus certam trium Portionum ad inſcripta triangula rationem demonſtrant [2]). Eam in Hyperbola primum mihi deprehendere contigit, viâ deſtinatâ planè, ſed impeditâ difficilique [3]); quâ deinde breviorem exquirens, in hanc incidi quæ ad Ellipſin & Circulum quoque pertineret, commodumque obvenit conſtans illa in cognatis figuris mirabiliſque convenientia. Quæ quidem univerſim in omnibus hiſce quo minus locum habeat, ſola facit Propoſitionum noviſsima, ſupernumeraria illa [4]) quaſi, atque ultra propoſitum adſcita,

[1]) Voir la note 4 à la page 58 du Tome présent.

[2]) Voir les „Theoremata VI et VII", p. 305 du Tome présent.

[3]) Nous n'avons trouvé dans les manuscrits de Huygens aucune trace de ce travail préalable.

[4]) Le „Theorema VIII", p. 309.

je m'étais proposé, et dont je ne puis m'attribuer équitablement autre chose, sinon d'avoir montré qu'elle peut être déduite des précédentes d'une manière assez élégante.

Car déjà depuis longtemps nous a prévenu et a donné et démontré, il y a dix-neuf ans, un Théorème excellent le très ingénieux géomètre I. Della Faille [5]), heureux, au moins dans mon opinion, d'avoir discerné avant d'autres, comment la quadrature des secteurs dépend du centre de gravité [6]); et, comme je reconnais qu'il a mérité des éloges principalement quant au cercle, je ne me suis pas tant réjoui après avoir découvert une connexion semblable dans les autres segments du cercle, que lorsque je l'observai dans les segments de l'Hyperbole, et eus trouvé ainsi une chose à laquelle un aussi grand homme ne pouvait avoir manqué d'avoir pensé lui-même. D'ailleurs cette figure, si on la compare au cercle, n'a trouvé jamais que de rares contemplateurs, ce dont nous voyons l'effet ou l'indice en ce qu'on a examiné différentes choses, lesquelles, étant données, doivent nécessairement conduire à la Quadrature du cercle, — telles que la longueur exacte du périmètre [7]), la tangente de l'hélice d'Archimède [8]), le terme de la quadratrice de Dinostrate [9]), ou la tangente de la même courbe a l'autre extrémité (comme je me souviens d'avoir démontré un jour [10])) et d'autres choses que l'on doit à de plus récents auteurs, — cependant rien de défini n'a dans le même temps été produit par qui que ce soit, de ce qui pourrait servir à comparer sous une condition quelconque l'Hyperbole avec une aire comprise entre des lignes droites.

Il est vrai que de nos jours, il y a peu d'années, le très savant Père Grégoire de St. Vincent [11]), dont il me reste à parler maintenant, par une méthode exquise et nouvelle a entrepris la Quadrature des deux courbes et a cru les avoir

---

[5]) Voir sur Della Faille la note 1, p. 153 du Tome I; comme aussi, pour plus de particularités, la Lettre N°. 105, p. 158 du même Tome.

Il s'agit ici du théorème suivant, qu'on trouve à la page 36 de l'ouvrage de Della Faille, cité dans la note 2 de la page 153 du T. I: „Propositio XXXIV. Theorema XXIX. Dato quolibet Sectore circuli, è centro bifariam diuiso, si fiat ut Sectoris arcus, ad duas tertias partes rectae subtendentis arcum, ita semidiameter ad quartam quandam lineam è centro sumendam, in ea quae Sectorem bifariam secat, eius terminus erit centrum gravitatis Sectoris propositi."

Comme on le voit, ce theorème, publié par Della Faille en 1632, est identique au „Theorema VIII" cité dans la note précédente.

[6]) Comparez le passage suivant que nous empruntons à la préface de l'ouvrage de Della Faille: „E Centro grauitatis quadratam ab Archimede parabolen nosti Amice Lector, eamque ad propria deinde Geometrarum principia reuocatam. Haec mihi occasio fuit cogitandi de centro gravitatis partium circuli, & an non aliqua ad quadraturam eius hinc pateret via primitus inquirendi; quae quàm firmo cum hoc centro sociata sit nexu, hoc opusculum percurrenti tibi palam fiet. Praesertim quòd reciproca quaedam sit sequela, & problematicè inuento grauitatis centro quadretur circuli Sector, adeoque totus; ac vicissim quadrato circulo, partium eius grauitatis centrum reperiatur. Nimium quantum cum figurae huius in

cujuſque hoc ſolum mihi tribui par eſt, quod ex præcedentibus ipſam non inelegandi ratione comprobari poſſe oſtendi. Dudum enim hîc nos prævenit, egregiumque Theorema ante annos undeviginti demonſtratum dedit acutiſsimus Geometra I. Della Faille [5]), felix, meâ quidem ſententiâ, quod ante alios perſpexerit, quomodo à ſectorum gravitatis centro Quadratura dependeret [6]): cumque illum in Circulo præcipuam laudem promeruiſſe agnoſcam, non æquè gaviſus ſum detectâ in reliquis hujus ſegmentis ſimili connexione, quàm cum eandem in Hyperboles portionibus obſervaſſem, illudque inveniſſem de quo tantus Vir non potuit non & ipſe cogitaſſe. Raros alioqui ſemper haec figura, ſi cum Circulo conferatur, ſui contemplatores nacta eſt; ejuſque rei vel effectum vel indicium habemus, quod cum varia ſint inſpecta quibus datis Quadraturam quoque Circuli dari neceſſe ſit; cujuſmodi ſunt exacta perimetri longitudo [7]), Helicis Archimedeæ contingens [8]), Quadratricis Dinoſtrati terminus [9]), vel tangens quoque ejuſdem Quadratricis ad terminum alterum, (ſicut aliquando me demonſtraſſe memini [10])) & alia nonnulla quæ recentioribus debentur; nihil interea à quoquam definitum extet, quo vel ſub ulla conditione Hyperbole cum ſpatio rectis comprehenſo lineis comparari poſſit. Noſtrâ ſanè ætate, pauciſque abhinc annis Vir Clariſſ. D. Gregorius à S. Vincentio [11]), de quo mihi deinceps dicendum reſtat, exquiſitâ prorſus novâque methodo utramque Quadraturam agreſſus eſt, & credidit

quadratum metamorphosi doctorum virorum ingenia vano conatu luctata sint, dum alij per ignoratam hactenus dimetientis cum perimetro proportionem, alij per curuas quasdam lineas, cuiusmodi sunt helices & quadratices, alij denique per lunulas id sunt agressi; nemo tamen, quod sciam, hanc institit viam, vt à circuli gravitate ad explicandam eius aream proficisceretur."

[7]) Comparez le § 1 de la Pièce N°. IX, p. 50 du Tome présent.

[8]) Comparez la Prop. 18 de l'ouvrage d'Archimède „De lineis spiralibus", p. 111 de l'édition de Bâle de 1544, citée p. 274, note 3: „Si lineam spiralem in prima reuolutione descriptam linea recta contigerit in termino lineae spiralis, à puncto autem quod est initium lineae spiralis, ducatur linea quaedam recta stans angulis rectis super lineam, quae initium fuit revolutionis: illa ducta coincidet lineae contingenti, & eius pars quae intra contingentem, & initium spiralis lineae deprehenditur, aequalis erit circumferentiae primi circuli." C'est-à-dire du cercle qui a pour rayon la distance du point initial de la spirale au point terminal de sa première révolution. (Heiberg, T. II, p. 71 de l'édition citée p. 50 du Tome présent).

[9]) La quadratrice de Dinostrate et l'usage de son point terminal pour la quadrature du cercle se trouvent décrits dans le quatrième livre des „Mathematicae collectiones" de Pappus; voir les pages 57 recto et verso et 58 recto de l'édition de Commandin, citée dans la note 3 de la page 259 de notre T. II. (Hultsch p. 251—259, T. I de l'édition citée p. 215, note 17, du Tome présent).

[10]) Nous ne connaissons pas cette démonstration, mais nous pouvons renvoyer à la note 19, p. 440 du Tome X, où l'on trouve une construction de Huygens de la tangente à la quadratrice datée du 6 novembre 1659. D'après cette construction la distance du point D (voir la figure de la note mentionnée) au point, où la tangente du point A coupe la droite CD, sera égale au quart du périmètre du cercle décrit avec le rayon DA.

[11]) On peut consulter, sur Grégoire de St. Vincent, la note 5, p. 53 du T. I.

accomplies par à peu près la même démonſtration. Mais quant à moi, lorſque, après avoir déjà mis par écrit mes Théorèmes, je parcourus avec plus de diligence le volume très étendu qu'il publia ſur ce ſujet[12]), (aſſuré que, s'il avait obtenu ce qu'il s'était propoſé, moi, du moins, je produirais les centres de gravité,) je compris enfin qu'il avait tenté une choſe ardue avec plus de ſubtilité que de ſuccès, ayant trouvé de même le raiſonnement par lequel je me fais fort de le prouver très clairement.

Et comme, parmi tant d'éminents géomètres de cette époque, je n'ai pu remarquer aucun qui s'était choiſi cette tâche, et que par conſéquent il pourrait arriver que l'on reſterait longtemps en doute ſur des démonſtrations qui doivent être très certaines, j'ai jugé que je ferais une choſe à la fois utile au public et non étrangère au ſujet que je me propoſais, ſi je me permettais de faire paraître ici en même temps les choſes qui me ſemblaient apporter quelque nouvelle lumière ſur un terrain obscur. D'ailleurs, je n'ai nullement entrepris de diminuer témérairement l'autorité d'un homme ſérieux et érudit, mais entraîné par la bonté de la cause j'ai cru que je pourrais propoſer librement et ſans offenſe ce que j'avais trouvé. Et cela avec d'autant plus de confiance, que lui-même, dans une des lettres que nous nous écrivons de temps en temps[13]), il m'a candidement dit et exhorté[14]) de communiquer publiquement les commentaires que je pourrais avoir compoſés. J'ai accepté avec joie et reconnaiſſance, comme elle le méritait, cette inſigne ingenuité et j'espère avoir aſſez montré par la modestie de ma critique combien j'eſtimais d'être conſidéré comme un ami par le très ſavant auteur. Réciproquement la très haute humanité, qu'il m'a témoignée juſqu'ici, ne me fait attendre de lui autre choſe qu'une réponſe modérée et ſans aucune aigreur[15]), s'il eſtime qu'il y a quelques choſes à oppoſer ou bien que, perſuadé par des raiſons très évidentes il reconnaîtra et embraſſera des choſes plus vraies auſſi volontiers par mes efforts que plus tard par ceux d'autres.

---

[12]) Voir l'ouvrage cité dans la note 6 de la page 53 de notre Tome I. A part l'épitre dédicatoire à l'archiduc Léopold d'Autriche, la préface, l'„Elenchus materiarum", l'épilogue et les „errata", cet ouvrage ne contient pas moins de 1225 pâges.

[13]) Voir, au Tome I, les Lettres N°. 96, du 6 octobre 1651, N°. 99 du 16 octobre 1651; N°. 100, du 25 octobre 1651; N°. 101, du 1er novembre 1651; N°. 102, du 8 novembre 1651 et N°. 105 du 21 novembre 1651. La Lettre N°. 90 n'appartient pas à cette partie de la correspondance; elle date en réalité du 18 février 1652; consultez les „additions et corrections" p. 619 du Tome V. La correspondance fut poursuivie après l'apparition de l'„Ἐξέτασις" jusqu' en 1654 et reprise en 1658.

eâdem ſe propemodum demonſtratione abſolviſſe. At ego cum amplissima quæ de hiſce volumina emiſit [12]), perſcriptis jam Theorematis meis, diligentius evolverem, (certus, ſi quod intenderat obtineret, ſaltem gravitatis me centra exhibiturum,) intellexi tandem, majori ſubtilitate quàm ſucceſſu rem arduam tentatam fuiſſe, ratione quoque repertâ quâ id clarisſime oſtendi poſſe confido. Et quando inter tot eximios hoc ævo Geometras nondum licuit animadvertere qui ſibi hanc provinciam delegerit, ac proinde fieri poſſet ut longa porrò dubitatio maneret circa demonſtrationes, quas certisſimas eſſe oportet; arbitratus ſum me facturum quod & in publicum utile eſſet & à propoſiti argumenti ratione non alienum, ſi ſimul hìc prodire ſinerem, quæ novam in re obſcura lucem allatura videbantur. Nullâ autem temeritate ad elevandam Viri gravis & eruditi auctoritatem acceſsi, ſed cauſæ bonitate adductus, putavi quæ compereram liberè citraque offenſam proponi poſſe. Majori quoque fiduciâ, poſteaquam is ſeſe ipſum per literas, quarum aliquod inter nos commercium eſt [13]), autorem hortatoremque candidè præbuit [14]) ut ſi qua commentatus eſſem, ea cum univerſis communicarem. Ingenuitatem hanc inſignem lubenti gratoque uti meretur animo accepi, & ſpero modeſtâ reprehenſione ſatis me declaraſſe, quanti æſtimem Doctiſſ. Viro haberi amicus. Cujus invicem ſumma, quâ me uſque adhuc excepit, humanitas facit ne quid aliud expectem, niſi ut vel moderatè & ſine ulla acerbitate ad mea reſpondeat [15]), ſi quid iis reponendum eſſe duxerit, vel rationibus evidentisſimis perſuaſus, æquè lubens noſtrâ quam alterius poſthac operâ veriora ſentiat & amplectatur.

[14]) Voir la Lettre N°. 99. pp. 149—150 du T. I et le commencement de la Lettre N°. 101, T. I. p. 152.

[15]) Grégoire de St. Vincent n'a jamais répondu lui-même, mais en 1656 un de ses élèves, Franç. Xav. Aynscom, a pris sa défense dans l'ouvrage cité dans la note 6 de la page 210 du Tome I. Huygens lui a répondu dans une lettre publique que nous avons reproduite sous le N°. 233, T. I. pp. 495—502 et que nous ferons suivre encore une fois avec la traduction française, lorsque nous traitons les travaux de l'année 1656.

CHRISTIAAN HUYGENS, FILS DE CONSTANTIN.

THÉORÈMES SUR LA QUADRATURE

DE L'HYPERBOLE, DE L'ELLIPSE ET DU CERCLE, DÉDUITE DE LA POSITION DONNÉE DU CENTRE DE GRAVITÉ DES SEGMENTS.

Théorème I.

A un ſegment d'hyperbole, ou à un ſegment d'ellipſe ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipſe ou la moitié du cercle, on peut circonſcrire une figure, compoſée de parallélogrammes d'égales largeurs, excédant le ſegment d'une quantité moindre qu'une aire quelconque donnée.

Soit donné le ſegment ABC [Fig. 1], dont le diamètre ſoit BD. Sur la baſe AC ſoit conſtruit le parallélogramme AE, ayant deux côtés parallèles et égaux au diamètre BD, d'où il arrivera que le côté reſtant touche le ſegment à ſon ſommet. Ayant diviſé continuellement ce parallélogramme en deux parties égales, il reſtera enfin une partie moindre que l'aire donnée. Soit cette partie le parallélogramme BF et ſoit la baſe AC diviſée aux points G, H, K etc. en parties égales à DF, et que de ces points on mène à la circonférence les droites GL, HM, KN etc. [parallèles au diamètre] [1]) et que l'on achève les parallélogrammes DO, GP, HQ, KR, etc. Je dis que la figure composée de tous ces parallélogrammes (laquelle dans la ſuite ſera nommée circonſcrite par ordonnées) excédera le ſegment ABC d'une quantité moindre que l'aire donnée.

En effet, joignons AN, NM, ML, LB, BS etc., il réſultera de cette manière auſſi une figure rectiligne inſcrite dans le ſegment, et l'excès de la figure circonſtrite, qui conſiſte en parallélogrammes, ſur la figure inſcrite ſera plus grand que celui ſur le ſegment ABC. Mais l'excès de la circonſcrite ſur l'inſcrite conſiſte en triangles, deſquels ceux qui ſont ſitués d'un côté du diamètre comme ARN, NQM, MPL, LOB égalent la moitié du parallélogramme OD ou BF, parce que de

[1]) Voir les „Errata" à la fin de l'„Ἐξέτασις" (p. 337).

CHRISTIANI HVGENII, CONST. F.

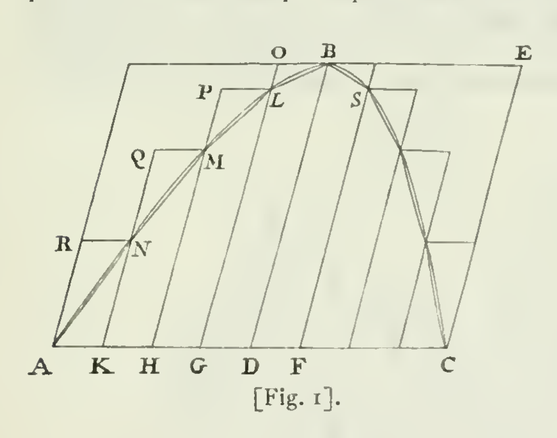
THEOREMATA DE QUADRATURA

HYPERBOLES, ELLIPSIS ET CIRCULI, EX DATO PORTIONUM GRAVITATIS CENTRO.

Theorema I.

Portioni hyperboles, vel ellipsis vel circuli portioni, dimidiâ ellipsi dimidiove circulo non majori circumscribi potest figura ex parallelogrammis æqualem latitudinem habentibus, quæ portionem excedat spatio quod minus sit quovis dato.

Data sit portio ABC, [Fig. 1] cujus diameter BD. Super basin AC constituatur parallegrammum AE, latera duo habens diametro BD parallela & æqualia, quo fiet ut latus reliquum portionem in vertice contingat. Hoc parallelogrammo continuè in duo æqualia secto, relinquetur tandem pars quæ minor erit dato spatio; sit ea parallelogrammum BF, & dividatur basis AC in partes æquales ipsi DF, punctis G, H, K &c. atque inde ducantur ad sectionem rectae GL, HM, KN &c [diametro BD parallelae] [1]) & perficiantur parallelogramma DO, GP, HQ, KR &c. Dico figuram ex omnibus istis parallelogrammis compositam (quæ imposterum ordinatè circumscripta vocabitur) superare portionem ABC minori quàm datum sit spatio.



[Fig. 1].

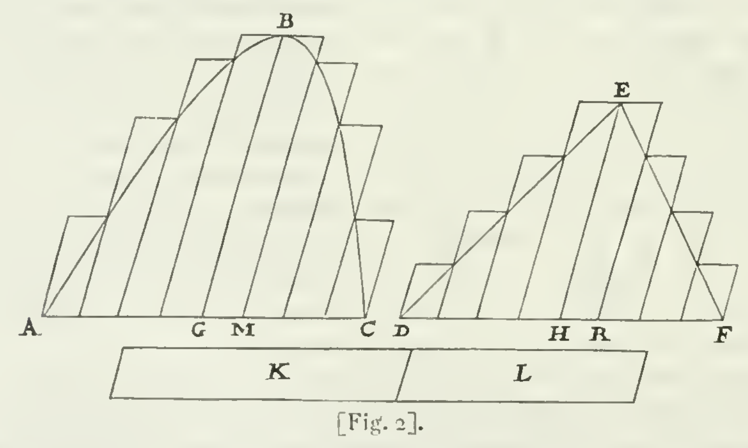
Jungantur enim AN, NM, ML, LB, BS, &c. eritque hac ratione inscripta quoque portioni figura quædam rectilinea; majorque erit excessus figuræ circumscriptæ quæ ex parallelogrammis composita est, super inscriptam, quàm supra portionem ABC. Excessus autem circumscriptæ super inscriptam ex triangulis constat, quorum quæ sunt ab una diametri parte, ut ARN, NQM, MPL, LOB,

chacun d'eux la bafe eft égale à la bafe DF et la fomme de leurs hauteurs égale à la hauteur du parallélogramme BF. De même les triangles qui fe trouvent de l'autre côté du diamètre égalent la moitié du parallélogramme BF. Donc la fomme de tous les triangles, c'eft-à-dire le dit excès, eft égal au parallélogramme BF et par conféquent moindre que l'aire donnée. Mais moindre encore que cet excès était l'excès de la figure circonfcrite fur le fegment ABC. Donc ce dernier excès eft beaucoup moindre que l'aire donnée. Et il paraît qu'on peut exécuter ce qui était propofé.

Théorème II.

Etant donné un fegment d'hyperbole, ou un fegment d'ellipfe ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipfe ou du cercle, et étant donné un triangle qui ait une bafe égale à la bafe du fegment, on peut circonfcrire à l'un et à l'autre une figure composée de parallélogrammes tous de même largeur de manière que la somme des deux aires par lesquels les figures circonfcrites excèdent le fegment et le triangle foit moindre qu'une aire quelconque donnée.

Soit ABC [Fig. 2] le fegment et DEF le triangle, ayant AC et DF pour bafes égales, et foit BG le diamètre du fegment et EH dans le triangle une droite tirée du fommet vers le milieu de la bafe. Suppofons encore les deux BG, EH, soit perpendiculaires, foit également inclinées fur les bafes, et que l'aire donnée foit divifée en deux parties ayant le même rapport que BG à EH; foient K et L ces parties. Qu'il foit maintenant circonfcrit par ordonnées, de même qu'auparavant, une figure au fegment ABC, laquelle excède ce fegment d'une quantité moindre que l'aire K. Et qu'il foit circonfcrit au triangle DEF une figure qui confifte en autant de parallélogrammes qu'il y a dans la figure circonfcrite au fegment ABC.



[Fig. 2].

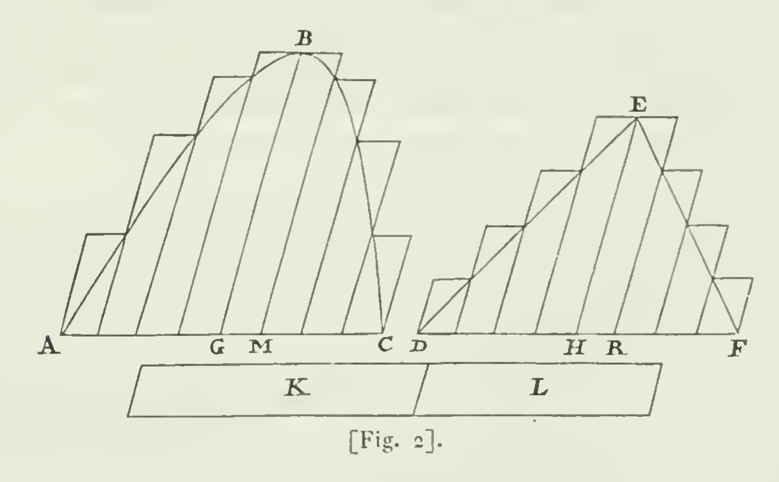
Puis donc que les bafes du fegment et du triangle font égales il eft clair que tous les parallélogrammes ont la même largeur. Donc, parce que le parallélo-

æquantur dimidio parallelogrammi OD vel BF, quia ſingulorum baſes baſi DF æquales ſunt, & omnium ſimul altitudo, parallelogrammi BF altitudini. Eâdem ratione triangula quæ ſunt ab altera diametri parte, æquantur dimidio parallelogrammi BF: Ergo omnia ſimul triangula ſive dictus exceſſus æqualis eſt parallelogrammo BF, eòque minor ſpatio dato. Sed eodem exceſſu adhuc minor erat exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra portionem ABC: igitur hic exceſſus dato ſpatio multo minor eſt. Et apparet fieri poſſe quod proponebatur.

Theorema II.

Data portione hyperboles, vel ellipſis vel circuli portione, dimidiâ ellipſi dimidiove circulo non majore, & dato triangulo qui baſin habeat baſi portionis æqualem; poteſt utrique figura[e] circumſcribi ex parallelogrammis quorum ſit omnium eadem latitudo, ita ut uterque ſimul exceſſus quo figuræ circumſcriptæ portionem & triangulum ſuperant, ſit minor ſpatio quovis dato.

Data ſit portio ABC [Fig. 2] & triangulus DEF, baſibus AC, DF æqualibus; & portionis diameter ſit BG, in triangulo verò ducta à vertice in mediam baſin linea EH. Sint autem utræque BG, EH vel ad baſes rectæ vel æqualiter inclinatæ; & quam rationem habet BG ad EH, in eandem dividatur ſpatium datum, ſintque partes K&L. Circumſcribatur iam ſicut antea portioni ABC figura ordinatè, quæ portionem ſuperet exceſſu minore quam ſit ſpatium K. Et triangulo DEF circumſcribatur figura quæ totidem parallegrammis conſtet, quot ſunt in figura portioni ABC circumſcripta.



[Fig. 2].

Quoniam igitur baſes portionis & trianguli æquales ſunt, apparet quidem omnium parallelogrammorum eandem fore latitudinem. Hinc quum parallogram-

gramme BM eſt à ER comme BG à EH, c'eſt-à-dire comme K à L et que BM eſt moindre que K*), ER ſera auſſi moindre que L**). Mais tous les triangles dont ſe compoſe l'excès de la figure circonſcrite ſur le triangle DEF ſont enſemble égaux au parallélogramme ER, donc cet excès eſt moindre que l'aire L. Mais l'excès par lequel la figure circonſcrite dépaſſe le ſegment ABC eſt moindre que l'aire K. Donc la ſomme des deux excès ſera moindre que l'eſpace donné KL. Et il paraît poſſible d'exécuter ce qui était propoſé.

*) *Par conſtr.*
**) 14. 5. *Elém.* [2])

Théorème III.

Si à un ſegment d'hyperbole ou à un ſegment d'ellipſe ou de cercle n'excédant pas la moitié de l'ellipſe ou du cercle, on circonſcrit une figure par ordonnées, le centre de gravité de cette figure ſera ſitué ſur le diamètre du ſegment.

Soit ABC [Fig. 3] un quelconque de ces ſegments, BD ſon diamètre et ſoit circonſcrit comme ci-deſſus une figure par ordonnées. Il faut démontrer que le centre de gravité de cette figure tombe dans le diamètre BD. Soient menées les droites HK, NR, PS qui joignent les côtés ſuperieurs des parallélogrammes, qui de part et d'autre ſont à égales diſtances du diamètre.

Puis donc que FH, LK ſont parallèles au diamètre BD, et DF et DL égales, il faut que la droite HK, qui joint les deux droites FH, LK ſoit coupée en deux parties égales par le diamètre BD, d'où cette même HK ſera parallèle à la baſe AC*), et EHKQ une ligne droite. Donc EC est un parallélogramme dont les deux côtés oppoſés étant diviſés en deux parties égales par le diamètre BD, ce dernier contiendra le centre de gravité.**)

*) 5. *livre* 2. *Coniques.* [3])
**) 9. *liv.* 1. *Arch. de Aequipond.* [4])

Par la même raiſon HM, NO, PQ feront des parallélogrammes et les centres de gravité de chacun d'eux ſitués ſur la ligne BD. Donc auſſi le centre de gravité de la figure compoſée de tous les dits parallélogrammes doit néceſſairement ſe trouver ſur la même droite BD. Mais cette figure eſt la même que celle qui fut circonſcrite par ordonnées au ſegment. Donc il paraît que le centre de gravité

---

[2]) Voir la page 502 de l'ouvrage de Clavius „Euclidis Elementorum Libri XV", cité dans la note 6, p. 477 du T. I, où on lit sous la „Prop. 14" du „Liber V": „Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam: Prima vero quam tertia maior fuerit, erit & secunda maior quam quarta. Quod si prima fuerit aequalis tertiae, erit & aequalis quartae: Si vero minor, & minor erit."

[3]) Voir, à la pag. 45 verso de l'édition de Commandin, citée dans la note 4 p. 6 du Tome I, la proposition suivante: „Si parabolae, uel hyperbolae diameter lineam quandam bifariam secet; quae ad terminum diametri contingit sectionem aequidistans est linea bifariam sectae." Ainsi, dans le cas de la parabole et de l'hyperbole, les droites AC et HK doivent être parallèles à une même ligne, c'est-à-dire à la tangente en B.

Dans le cas de l'ellipse, Apollonius a dû ajouter une restriction, qu' on trouve formulée dans la „Prop. 6. lib 2.", qui est comme il suit: „Si ellipsis, uel circuli circumferentiae dia-

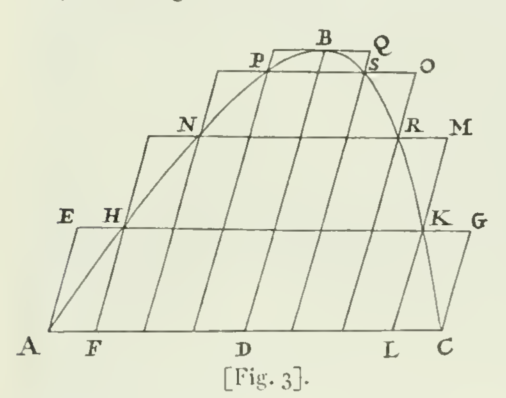
mum BM ſit ad ER ut BG ad EH, id eſt ut K ad L, ſitque BM minus quam K *), erit quoque ER minus quam L **). Verùm omnia triangula quibus conſtat exceſſus figuræ circumſcriptæ ſupra triangulum DEF, æqualia ſunt parallelogrammo ER, ergo minor eſt idem exceſſus ſpatio L. Sed & exceſſus quo figura circumſcripta portionem ABC ſuperat minor eſt ſpatio K. Ergo uterque ſimul exceſſus minor erit ſpatio KL dato. Et conſtat fieri poſſe quod proponebatur. *) *Ex conſtr.* **) 14.5. *Elem.*[3])

Theorema III.

Si portioni hyperboles, vel ellipſis vel circuli portioni, dimidiâ ellipſi dimidiove circuli non majori, circumſcribatur figura ordinatè; ejus figuræ centrum gravitatis erit in portionis diametro.

Sit portio quælibet iſtarum ABC [Fig. 3], diameter ejus BD; & circumſcribatur ei ut ſupra figura ordinatè. Oſtendendum eſt ejus figuræ centrum gravitatis fore in BD diametro. Ducantur lineæ HK, NR, PS, conjungentes ſuprema latera parallelogrammorum quæ à diametro portionis æqualiter utrinque diſtant.

Quoniam igitur FH, LK ſunt diametro BD parallelæ, ſuntque DF, DL æquales, oportet lineam HK, quæ duas FH, LK conjungit, à diametro BD bifariam ſecari; quare eadem HK parallela erit baſi AC *), & EHKG recta linea. Itaque EC parallelogrammum eſt; cujus oppoſita latera quum bifariam dividat diameter BD, erit in ea parallelogrammi centrum gravitatis **). Eâdem ratione parallelogramma erunt HM, NO, PQ, & ſingulorum centra gravitatis in linea BD. Ergo & figuræ ex omnibus dictis parallelogrammis compoſitæ centrum gravitatis in eadem BD reperiri neceſſe eſt. Iſta autem figura eadem eſt quæ portioni ordinatè fuerat circumſcripta. Ergo figuræ portioni ordi- *) 5 *lib.* 2 *Con.*[3]) **) 9. *lib.* 1. *Arch. de Æquipond.*[4])



[Fig. 3].

meter lineam quandam *non per centrum transeuntem* bifariam secet; quae ad terminum diametri continget sectionem, aequidistans erit bifariam sectae lineae."

Huygens évidemment ne s'est pas aperçu de cette circonstance, qui l'aurait obligé à citer les deux propositions mentionnées et à ajouter quelque remarque à propos du cas du demi-cercle ou de la demi-ellipse.

[4]) „Cuiuslibet figurae aequedistantium laterum centrum grauitatis est in linea recta, quae coniungit latera opposita ipsius figurae aequedistantium laterum, diuisae in duo aequa, quae latera in diuisione figurae secta fuerint"; p. 128 de l'édition de Bâle; voir la note 3 de l'Avertissement, p. 274 du Tome présent. (Heiberg, T. II, p. 163).

de la figure circonscrite par ordonnées au segment se trouve sur le diamètre BD du segment. Ce qu'il fallait démontrer.

Théorème IV.

D'un segment d'hyperbole, d'ellipse et de cercle le centre de gravité se trouve sur le diamètre du segment.

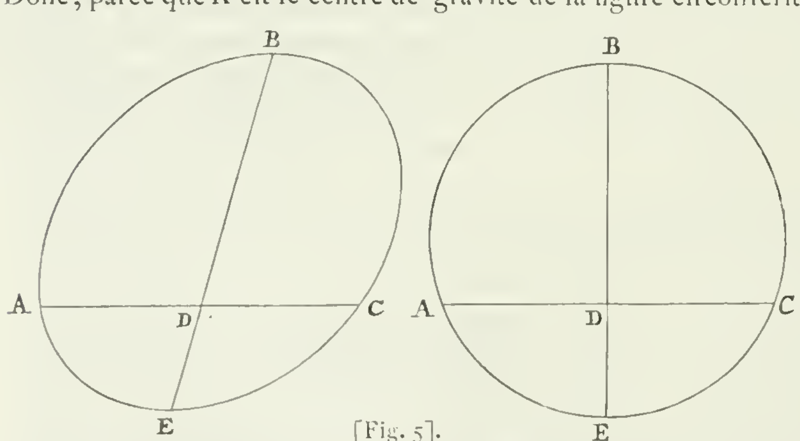
Soit ABC un segment d'hyperbole ou d'un ellipse ou d'un cercle, supposés d'abord pas plus grands que la moitié de la figure et BD son diamètre. Il faut démontrer que le centre de gravité du segment se trouve en BD.

En effet, posé, si cela peut avoir lieu, qu'il est situé hors du diamètre en E, tirons EH parallèle au diamètre BD. En divisant donc continuellement DC en deux parties égales, il restera enfin une ligne moindre que DH. Soit DF cette ligne et qu'on circonscrive par ordonnées au segment une figure à parallélogrammes dont les bases soient égales à DF et qu'on joigne BA, BC.

Le centre de gravité de la figure circonscrite au segment est donc situé sur le diamètre BD du segment. Soit K ce centre et soit tirée EK, prolongée jusqu' à rencontrer AL parallèle à BD. Puis donc que le segment est plus grand que le triangle ABC et l'aire par laquelle la figure circonscrite excède le segment moindre que le parallélogramme BF, comme il fut démontré*) plus haut, le rapport du segment ABC au dit excès sera plus grand que celui du triangle ABC au parallélogramme BF, c'est-à-dire que AD à DF, et beaucoup plus grand que AD à DH [5]) ou comme LK à KE. Soit donc MK à KE comme le segment ABC à l'excès par lequel il est lui-même dépassé par la figure circonscrite par ordonnées. Donc, parce que K est le centre de gravité de la figure circonscrite par ordonnées au segment, et E celui du segment lui-même, M sera le centre de gravité de toutes les aires qui constituent cet excès **). Ce qui ne peut pas être. Car si par M on tire une droite parallèle au diamètre BD toutes ces aires nommées seront situées du même côté. Il est donc manifeste que le centre de gravité du segment ABC est sur BD diamètre du segment. [7])

*) *Theor. 1.*

**) 8. livre 1. *Arch. de aequipond.* [6])



[Fig. 5].

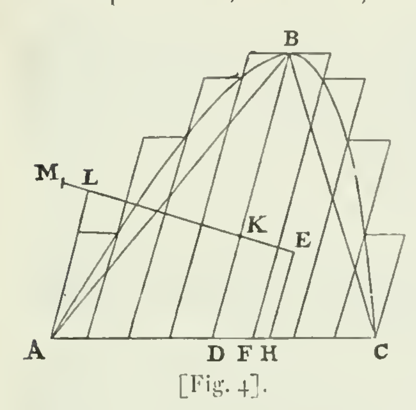
natè circumſcriptæ centrum gravitatis conſtat eſſe in BD portionis diametro. Quod erat oſtendendum.

Theorema IV.

Portionis hyperboles, ellipſis & circuli, centrum gravitatis eſt in portionis diametro.

Eſto portio hyperboles, vel ellipſis vel circuli dimidiâ primùm figurâ non major, ABC [Fig. 4]; diameter ejus BD. Oſtendendum eſt, in BD reperiri portionis ABC gtavitatis centrum.

Si enim fieri poteſt, ſit extra diametrum in E, & ducatur EH diametro BD parallela. Dividendo itaque DC continuè bifariam, relinquetur tandem linea minor quam DH; ſit ea DF, & circumſcribatur portioni figura ordinatè ex parallelogrammis quorum baſes æquales ſint lineæ DF, & jungantur BA, BC. Figuræ itaque portioni circumſcriptæ centrum gravitatis eſt in BD portionis diametro. Sit hoc K, & jungatur EK, producaturque, & occurrat ei AL parallela BD. Quia autem portio major eſt triangulo ABC, & exceſſus quo figura circumſcripta portionem ſuperat, minor parallelogrammo BF, uti ſupra demonſtratum fuit *); erit major ratio portionis ABC ad dictum exceſſum, quàm trianguli ABC ad BF parallelogrammum, id eſt quàm AD ad DF; [multòq; major quam AD ad DH,] [5]) vel quàm LK ad KE. Sit itaque MK ad KE ſicut portio ABC ad exceſſum quo ipſa ſuperatur à figura ordinatè circumſcripta. Itaque cum K ſit centrum grav. figuræ portioni circumſcriptæ, & E centrum grav. ipſius portionis; erit M centrum gravitatis omnium ſpatiorum quæ eundem exceſſum conſtituunt**). Quod eſſe non poteſt; Nam ſi per M linea ducatur diametro BD parallela, erunt ab una parte omnia quæ diximus ſpatia. Manifeſtum eſt igitur, portionis ABC centrum grav. eſſe in BD portionis diametro [7]).



[Fig. 4].

*) *Theor.* 1.

**) 3. *lib.* 1. *Arch. de æquipond.* [6])

[5]) Voir les „Errata" vers la fin de l'„Ἐξέτασις" (p. 337 du Tome présent).

[6]) „Si ab aliqua magnitudine magnitudo aliqua auferatur, quae non habeat idem centrum cum tota, residuae magnitudinis centrum grauitatis existit in linea recta, quae centra grauitatis totius magnitudinis & ablatae coniungat. & in ea illius parte in qua linea ipsa à centro totius magnitudinis educitur extra, atque in eo puncto quo ipsa sic terminatur, ut ipsa iam educta ad eam quae jungit centra praedicta eam habeat proportionem, quam magnitudinis ablatae grauitas ad grauitatem residuae"; p. 128 de l'édition de Bâle, citée p. 274, note 3. (Heiberg. T. II, p. 161).

[7]) La méthode de démonstration, employée ici, est empruntée à Archimède qui l'applique (de Aequipond. 4. lib. II) à prouver le même théorème pour la parabole seulement; voir les pages 135 et 136 de l'édition de Bâle. (Heiberg. T. II. p. 199—201). On retrouvera la même méthode dans les démonstrations des „Prop. 4 et 6" de l'Appendice IV à l'ouvrage „De iis quae liquido supernatant"; p. 207—210 du Tome présent.

Soit maintenant ABC [Fig. 5] un ſegment d'ellipſe ou de cercle plus grand que la moitié de la figure. Complétons la figure et prolongeons BD juſqu'à ce qu'elle rencontre la ſection [conique] en E; ED ſera donc le diamètre du ſegment AEC et BDE le diamètre de la figure entière. Et comme ſur le diamètre BDE eſt ſitué le centre de gravité de la figure entière (car ceci réſultera de ce qui a été démontré auparavant, ſi l'on diviſe en deux parties égales la figure entière par un diamètre parallèle à AC) et ſur cette même droite le centre de gravité du plus petit ſegment AEC, ce qui vient d'être montré tantôt, le centre du gravité de l'autre ſegment ABC ſera également en BDE *), ce qu'il fallait démontrer.

*) 8 *livre* 1. *Arch. de Aequipond.*

LEMME. [8])

Soit EB [Fig. 6] une droite à laquelle on ajoute à l'une et à l'autre extrémité les droites égales ES et BP, et encore une autre PD. Je dis que l'aire, par laquelle le rectangle EDB excède EPB, eſt égale au rectangle SDP. Car le rectangle EDB eſt égal aux deux ſuivants: le rectangle EDP et le rectangle ſur ED, PB, dont le dernier excède le rectangle EPB de l'aire du rectangle DPB. Donc l'excès du rectangle EDB ſur le rectangle EPB eſt égal aux deux rectangles EPD et DPB. Mais le rectangle EDP, ſi l'on y ajoute le rectangle DPB, c'eſt-à-dire le rectangle ſur ES, DP, devient égal au rectangle SDP. Il eſt donc évident que l'excès du rectangle EDB ſur EPB eſt égal au rectangle SDP.

Soit [9]) de nouveau EB une droite [Fig. 7] de laquelle on retranche aux deux extrémités les deux égales ES, BP et de plus une autre PD. Je dis de nouveau que l'aire, par laquelle le rectangle EDB excède EPB, eſt égale au rectangle SDP. Car le rectangle EDB eſt égal aux deux ſuivants: le rectangle EDP et le rectangle ſur ED, PB, deſquels EDP eſt de nouveau égal aux deux ſuivants ſavoir le rectangle SDP et celui compris ſous ES et DP, ou le rectangle DPB. Donc le rectangle EDB eſt égal à ces trois rectangles, SDP, DPB et le rectangle ſur ED, PB; mais de ceux-ci les deux derniers égalent le rectangle EPB, donc le rectangle EDB eſt égal aux deux ſuivants, ſavoir les rectangles SDP et EPB, d'où il paraît que l'excès du rectangle EDB ſur le rectangle EPB eſt égal au rectangle SDP.

THÉORÈME V.

Etant donné un ſegment d'hyperbole, ou d'ellipſe ou de cercle n'excédant pas la moitié de la figure; ſi ſur le diamètre eſt conſtruit un triangle de telle manière que

[8]) Dans l'exemplaire des „Theoremata" que nous poſſédons, Huygens a annoté ici en marge: „Idem hoc aliter demonstratum reperi apud Pappum, lib. 7. Prop. 24." Voir en effet la page 174 recto de l'édition de Commandin des „Mathematicae collectiones", ou l'édition de Hultsch T. II, p. 707.

[9]) Dans le même exemplaire, Huygens a ajouté ici en marge: „Vide eundem, lib. 7. Prop. 57." Voir Commandin p. 194 recto; Hultsch T. II, p. 753.

Eſto nunc ABC [Fig. 5] portio ellipſis vel circuli, dimidiâ figurâ major. Abſolvatur figura, & producatùr BD uſque dum ſectioni occurrat in E; erit igitur portionis AEC diameter ED, & BDE diameter totius figuræ. Et quoniam in BDE diametro eſt figuræ totius centrum gravitatis, (hoc enim ex prædemonſtratis conſtabit, ſi in duo æqualia tota figura dividatur diametro quæ ipſi AC ſit parallela,) & in eadem centr. gravitatis AEC portionis minoris, ſicut modò oſtenſum fuit; erit quoque centr. gravitatis portionis reliquæ ABC in BDE *); quod erat oſtendendum. *) 8 *lib.* 1. *Archim. de Æquipond.*

Lemma [8]).

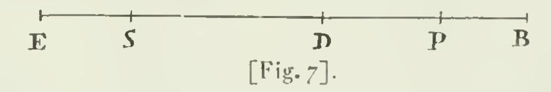
Eſto linea EB, cui ad utrumque terminum adjiciantur æquales duæ ES, BP, & inſuper alia PD. Dico id quo rectangulum EDB excedit EPB, æquari rectangulo SDP. Eſt enim rectangulum EDB æquale iſtis duobus, rectangulo EDP &

S E B P D

[Fig. 6].

rectangulo ſub ED, PB; quorum ultimum ſuperat rectangulum EPB rectangulo DPB. Igitur exceſſus rectanguli EDB ſupra rectangulum EPB æqualis eſt duobus iſtis, rectangulo EDP, & DPB. Sed rectangulum EDP addito rectangulo DPB, id eſt rectangulo ſub ES, DP, æquale fit rectangulo SDP. Manifeſtum eſt igitur, exceſſum rectanguli EDB ſupra EPB, æquari rectangulo SDP.

Eſto [9]) rurſus linea EB [Fig. 7], cui ad utrumque terminum auferantur duæ æquales ES, BP, & inſuper alia PD. Dico iterum, id quo rectangulum EDB excedit EPB, æquari rectangulo SDP. Rectangulum enim EDB æquale eſt iſtis duobus, rectangulo EDP, & rectangulo ſub ED, PB; horum autem EDP rurſus



[Fig. 7].

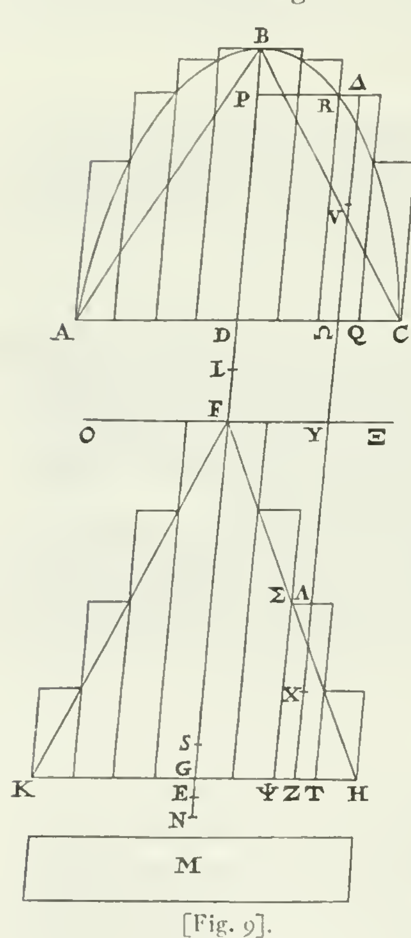
æquale eſt duobus, rectangulo nimirum SDP, & ei quod continetur ſub ES, DP, ſive rectangulo DPB. Igitur rectangulum EDB iſtis tribus æquale eſt rectangulis, SDP, DPB, & rectangulo ſub ED, PB; horum vero duo poſtrema æquantur recangulo EPB; ergò rectangulum EDB æquale eſt duobus, rectangulo nimirum SDP & EPB, unde apparet exceſſum rectanguli EDB ſupra rectangulum EPB æquari rectangulo SDP.

Theorema V.

Datâ portione hyperboles, vel ellipſis vel circuli portione, dimidiâ figurâ non majore; ſi ad diametrum conſtituatur triangulus hujusmodi, qui verticem habeat

ſon ſommet ſoit au centre de la courbe et la baſe égale et parallèle à la baſe du ſegment, mais telle que le carré de la droite menée du ſommet au milieu de la baſe ſoit égal au rectangle conſtruit ſur les droites compriſes entre la baſe du ſegment et les extrémités du diamètre de la courbe [10]), *le centre de gravité de la figure composée du ſegment ensemble avec le triangle décrit ſera le ſommet du triangle, c'eſt-à-dire le centre de la courbe.*

Soit donné ABC le ſegment d'hyperbole [Fig. 8] ou d'ellipſe [Fig. 9] [10bis]) ou de cercle n'excédant pas la moitié de la figure. Soit ſon diamètre BD, le diamètre de la courbe BE dans le milieu duquel F eſt le centre de la courbe. Et qu'on faſſe la droite FG telle que son carré équivaut au rectangle BDE et après avoir tiré KGH égale et parallèle à la baſe AC et diviſée au point G en deux parties égales, que l'on joigne KF, FH [11]). Il faut démontrer que de la figure compoſée du ſegment ABC et du triangle KFH, le centre de gravité ſe trouve au point F.



[Fig. 9].

S'il ne ſe trouve pas en F, qu'il ſoit, ſi poſſible, d'abord du côté vers le ſegment ABC, en L, car il eſt certain qu'il ſe trouvera ſur la droite BDG parce que dans celle-ci ſe trouvent les centres de gravité tant du ſegment que du triangle KFH. Que l'on joigne AB, BC et que le rapport de GF à FL ſoit auſſi celui de la ſomme des triangles ABC, KFH à une certaine aire M.

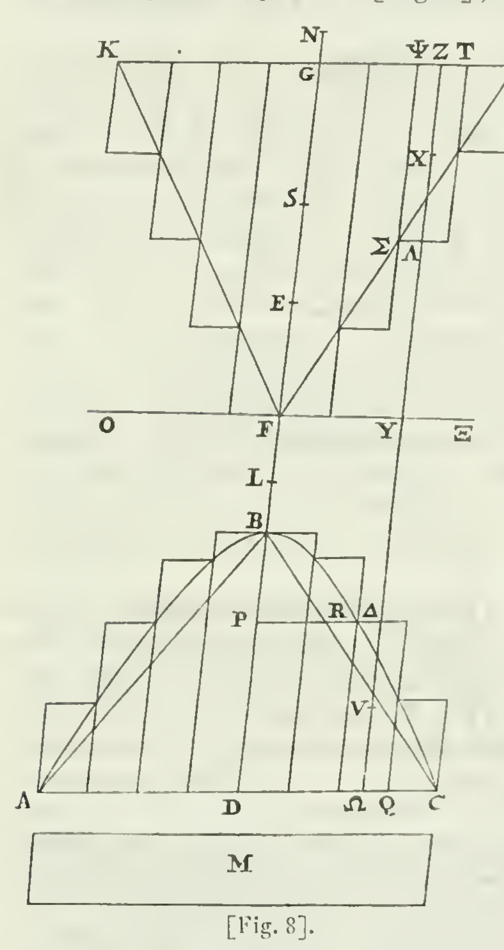
Soient circonſcrits par ordonnées au ſegment et au triangle KFH des figures au moyen de parallélogrammes de même largeur, de manière que la ſomme des deux excès par leſquels ces figures dépaſſent le ſegment ABC et le triangle KFH ſoit moindre que l'aire M *). Par conſéquent le rapport de la ſomme des deux triangles ABC, KFH à la ſomme des deux excès ou réſidus ſera plus grand que celui à M c'eſt-à-dire que GF à FL, et partant beaucoup plus grand que GF à FL ſera le rapport de la ſomme du ſegment ABC et du triangle KFH aux mêmes réſidus. Soit donc NF à FL

*) *Theor.* 2. *h.*

[10]) C'est-à-dire qu'on a $FG^2 = BD \times DE$, où B et E constituent les extrémités du diamètre BE de l'hyperbole ou de l'ellipse

in centro figuræ, & basin portionis basi æqualem & parallelam; eam verò quæ deinceps à vertice ad mediam basin pertingit tantam, ut possit ipsa rectangulum comprehensum lineis, quæ inter portionis basin & terminos diametri figuræ interjiciuntur. [10]) *Erit magnitudinis, quæ ex portione & præscripto triangulo componitur, centrum gravitatis punctum idem quod est trianguli vertex, centrum nimirum figuræ.*

Data sit portio hyperboles [Fig. 8], vel ellipsis [Fig. 9] [10bis]) vel circuli portio dimidiâ figura non major, ABC. Diameter ejus sit BD, & figuræ diameter BE, in cujus medio centrum figuræ F. Et sumatur FG quæ possit rectangulum BDE, ductâque KGH æquali & parallelâ basi AC, quæque ad G bifariam dividatur, jungantur KF, FH [11]). Demonstrandum est, quòd magnitudinis compositæ ex portione ABC & triangulo KFH, centrum gravitatis est punctum F.



[Fig. 8].

Si non est in F, sit si fieri potest primùm ab ea parte puncti F quæ est versus ABC portionem, atque esto punctum L; constat autem futurum in recta BDG, quum in hac sint utraque centra gravitatis portionis & trianguli KFH. Jungantur AB, BC, & quam rationem habet GF ad FL, eam habeat magnitudo composita ex triangulis ABC, KFH ad spatium quoddam M; & circumscribantur portioni & triangulo KFH figuræ ordinatè, ex parallelogrammis quorum omnium sit eadem latitudo, ita ut duo simul excessus quibus istæ figuræ superant portionem ABC & triangulum KFH, minores sint spatio M *). Igitur duorum simul triangulorum ABC, KFH ad dictos duos excessus sive residua major erit ratio quàm ad M id est quàm GF ad FL; ac proinde longè major ratio portionis ABC unà cum KFH triangulo ad eadem residua quam

*) *Theor. 2. h.*

[10bis]) La figure, reproduite par photographie d'après l'original, a Y au lieu du T du texte.

[11]) Ici encore Huygens a ajouté en marge: „Notatu dignum quod KF, FH in hijperbole sunt asymptoti."

comme la ſomme du ſegment ABC et du triangle KFH à la ſomme des deux réſidus et que le point N tombe au delà de la baſe KH. Maintenant que par F on tire OΞ parallèle à la baſe AC ou KH et que de deux parallélogrammes quelconques également diſtants du diamètre dans le ſegment et dans le triangle KFH, tels que RQ, ΣT, les centres de gravité ſoient V et X, par leſquels on tire la droite ZΛΔΩ coupant la droite OΞ en Υ, et ſoit tiré RP parallèle à la baſe AC, et que de l'autre extrémité E du diamètre de la courbe on faſſe ES égale à PB l'abſciſſe depuis le ſommet.

Puis donc que CD et RP ſont les ordonnées au diamètre de la courbe, le carré de CD ſera à celui de RP*) comme le rectangle BDE au rectangle BPE. Mais comme CD à RP, c'eſt-à-dire comme HG à ΨG, ainsi HF est à ΣF et ainsi ZΥ à ΛΥ, donc comme le carré de CD au carré de RP, c'eſt-à-dire comme le rectangle BDE à BPE, ainſi le carré de ZΥ à celui de ΛΥ. D'où encore, par converſion des rapports, comme le rectangle BDE eſt à la différence des rectangles BDE, BPE, ainſi eſt le carré de ZΥ à la différence des carrés de ZΥ, ΛΥ. Mais la différence des rectangles BDE, BPE eſt égale au rectangle SDP, ainſi qu'il a été démontré par le lemme précédent [13]), et la différence des carrés ZΥ, ΔΥ égale à la ſomme du carré ZΛ et de deux rectangles ZΛΥ**), ou, ce qui revient au même, aux deux rectangles ZΛX, ZΛΥ, pris deux fois, c'eſt-à-dire au double du rectangle ſur ZΛ, XΥ. Donc, comme le rectangle BDE eſt au rectangle SDP, ainſi eſt le carré de ZΥ au double du rectangle ſur XΥ, ZΛ, d'où, puiſque le rectangle BDE eſt égal au carré de FG***) et par conſéquent auſſi au carré de ZΥ, le rectangle SDP ſera de même égal au double du rectangle ſur XΥ, ZΛ†).

*) 21 *livre* 1. *Con.* [12])

**) 4. *livre* 2. *Elém.* [14])

***) *Par conſtr.*

†) 14. 5. *Elém.* [15])

Mais comme le point F diviſe BE au milieu et BP, ES ſont égales, FP, FS ſeront égales auſſi d'où, ajoutant de part et d'autre FD, SD ſera égale à PFD [16]) en entier, c'eſt-à-dire à ΔΥΩ, mais △ΥΩ est double de VΥ, puis qu'elle contient deux fois les deux ΥΔ et ΔV dans l'hyperbole [Fig. 8], mais dans l'ellipſe [Fig. 9] et le cercle deux fois les deux VΩ et ΩΥ; donc SD auſſi eſt double de VΥ et par conſéquent le rectangle SDP le double du rectangle ſur ΥV, ΩΔ. Mais le même rec-

[12]) Voir, à la page 19 recto de l'édition de Commandin, la proposition suivante: „Si in hyperbola uel ellipsi, uel circuli circumferentia, rectae lineae ordinatim ad diametrum applicentur: erunt quadrata earum ad spacia contenta lineis; quae inter ipsas, & uertices transuersi lateris figurae intercipiuntur, ut figurae rectum latus ad transversum: inter se se uero, ut spacia, quae interiectis, ut diximus lineis, continentur."

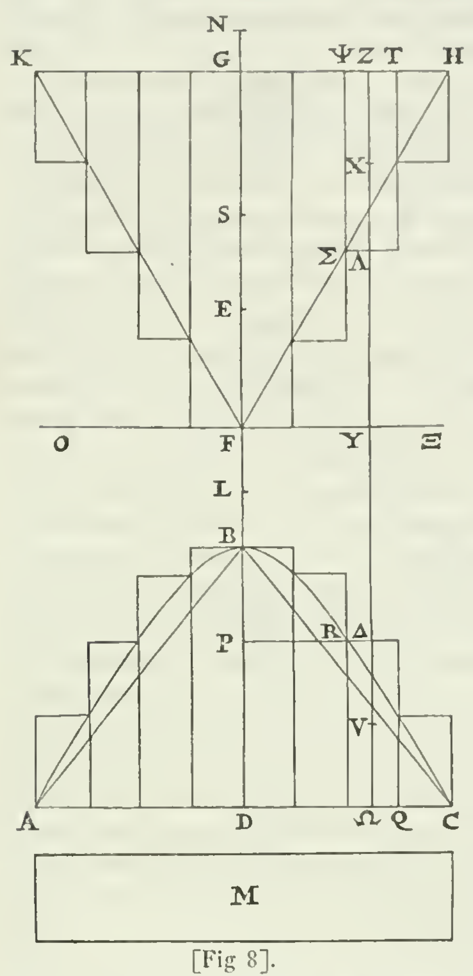
[13]) La première partie du „lemma" s'applique à la figure 8, c'est-à-dire à l'hyperbole; la seconde à la figure 9, c'est-à-dire à l'ellipse.

[14]) „Si recta linea secta sit vtcunque: Quadratum, quod à tota describitur, aequale est & illis; quae à segmentis describuntur, quadratis, & ei, quod bis sub segmentis comprehenditur, rectangulo." (Clavius, p. 172).

[15]) Voir la note 2, p. 292.

[16]) C'est-a-dire PF + FD.

GF ad FL. Sit itaque NF ad FL, ſicut portio ABC ſimul cum triangulo KFH ad duo reſidua, & cadet terminus N ultra trianguli baſin KH. Jam per F ducatur OΞ parallela baſi AC vel KH; & duorum quorumcunque parallelogrammorum, quæ in portione & in triangulo KFH æqualiter à diametro diſtabunt, ut ſunt RQ, ΣT, ſint centra gravitatis V & X; per quæ ducatur recta ZΛΔΩ, ſecans lineam OΞ in Υ; & ducatur RP baſi AC parallela, abſciſſæque ad verticem lineæ PB ſumatur æqualis, ex altero diametri figuræ termino, ES.



[Fig 8].

Quoniam igitur ad diametrum figuræ ordinatim ſunt applicatæ CD & RP, erit ut rectangulum BDE ad rectangulum BPE ita quadratum CD ad RP quadratum *); verùm ut CD ad RP, hoc eſt, ut HG ad ΨG, ita eſt HF ad ΣF, & ita ZΥ ad ΛΥ, igitur ut CD quadratum ad quadratum RP, id eſt ut rectangulum BDE ad BPE, ita eſt quadratum ZΥ ad ΛΥ quadratum. Quare & per converſionem rationis, ſicut rectangulum BDE ad differentiam rectangulorum BDE, BPE, ita quadratum ZΥ, ad differentiam quadratorum ZΥ, ΛΥ. Eſt autem differentia rectangulorum BDE BPE, æqualis rectangulo SDP, ſicut lemmate præmiſſo demonſtratum eſt [13]); differentia verò quadratorum ZΥ, ΛΥ, æqualis quadrato ZΛ & duobus rectangulis ZΛΥ **), ſive quod idem eſt, rectangulis ZΛX, ZΛΥ bis ſumptis, hoc eſt, duplo rectangulo ſub ZΛ, XΥ. Itaque ſicut eſt rectangulum BDE ad rectangulum SDP, ita quadratum ZΥ ad duplum rectangulum ſub XΥ, ZΛ. quare cum rectangulum BDE quadrato FG æquale ſit***), ideoque & quadrato ZΥ, erit quoque rectangulum SDP æquale duplo rectangulo ſub XΥ, ZΛ†). Quia verò F punctum dividit BE per medium, ſuntque æquales BP, ES, etiam FP, FS æquales erunt, unde additâ utrique FD, erit SD æqualis toti PFD [16]) id eſt ΔΥΩ: ſed ΔΥΩ dupla eſt lineæ VΥ, quia bis continet utramque ΥΔ, ΔV in hyperbole [Fig. 8], in ellipſi [Fig. 9] verò & circulo bis utramque VΩ & ΩΥ; ergo & SD dupla VΥ, ideoque rectangulum SDP æquale duplo rectan-

*) 21 *lib.* 1. *Con.*[12])

**) 4. *lib.* 2. *Elem.*[14])

***) *Ex conſtr.*

†) 14. 5. *Elem.*[15])

tangle SDP a été démontré être égal au double du rectangle ſur XΥ, ZΛ [Fig. 8 ou 10]; donc le rectangle ſur ΥV, ΩΔ eſt égal au rectangle ſur XΥ, ZΛ. On a donc ΥV à ΥX comme ΛZ à ΩΔ *); mais comme ΛZ a ΩΔ ainſi eſt le parallélogramme ΣT à RQ, donc auſſi ΥV à ΥX comme le parallélogramme ΣT au parallélogramme RQ. Mais les points X et V ſont les centres de gravité des dits parallélogrammes, donc Υ eſt le centre de gravité des deux parallélogrammes réunis **). De la même manière on peut démontrer de tous les autres parallélogrammes que de deux oppoſés quelconques le centre de gravité ſe trouve ſur la droite OΞ. Donc de l'aſſemblage entier des deux figures circonſcrites par ordonnées le centre de gravité doit ſe trouver néceſſairement ſur cette même droite OΞ. Mais de ce même aſſemblage le centre de gravité eſt auſſi ſitué ſur la droite BDG, parce que ſur elle ſe trouvent les centres de gravité de chacune des deux figures circonſcrites ***), donc le centre de gravité de l'aſſemblage des dites figures eſt le point F même. Mais on a ſuppoſé que le point L fût le centre de gravité de la figure compoſée du ſegment ABC et du triangle KFH; le centre de gravité du reſte de la figure ſe compoſant des deux réſidus qui appartiennent encore aux deux figures ſe trouvera donc ſur le prolongement de LF là, où cette droite ſe termine, de telle manière que la partie ajoutée ait à FL le même rapport que la ſomme du ſegment ABC et du triangle KFH aux deux dits réſidus †). Or, N eſt ce point terminal, le point N eſt donc le centre de gravité des deux réſidus. Ce qui ne peut pas être. Car, ſi par N on mène une droite parallèle à la baſe, toutes les aires, deſquelles conſiſtent l'un et l'autre réſidu, ſe trouvent du même côté. L n'eſt donc pas le centre de gravité de la figure compoſée du ſegment ABC et du triangle KFH. Mais ce centre ne ſe trouvera non plus de l'autre côté du point F. Car ſi cela fût dit, une démonſtration tout à fait pareille aurait pour réſultat que des deux réſidus qui reſteront dans les figures circonſcrites, après que l'on a ôté le ſegment ABC et le triangle KFH, le centre de gravité ſerait au delà du ſegment ABC, ce qui eſt également abſurde. Il reſte donc que le point F eſt le centre de gravité même, ce qu'il fallait démontrer.

*) 16. livre 6 Elem. [17])

**) 7. livre 1. Archim. de Aequip. [18])

***) Theor. 3.

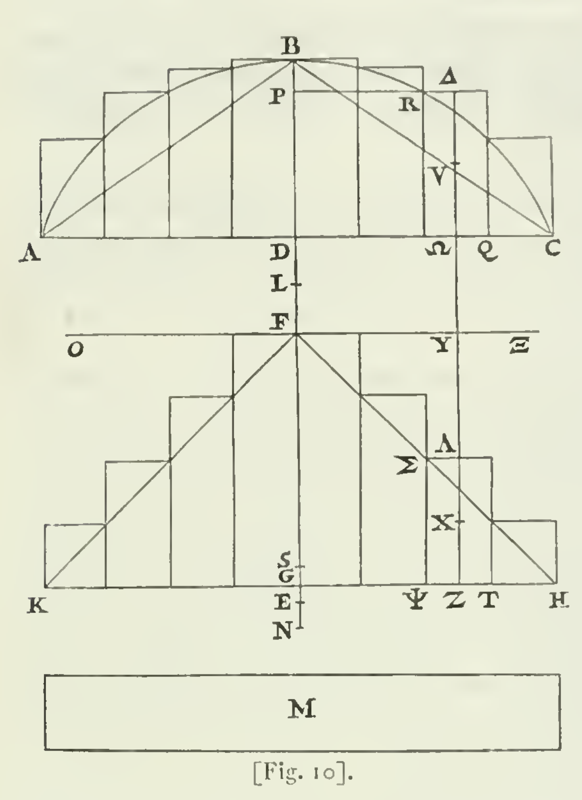
†) 8. livre 1. Archim. de Aequipond. [19])

[17]) „Si quatuor rectae lineae proportionales fuerint, quod sub extremis comprehenditur rectangulum, aequale est ei, quod sub mediis comprehenditur, rectangulo. Et si sub extremis comprehensum rectangulum aequale fuerit ei, quod sub mediis continetur, rectangulo: illae quatuor rectae lineae proportionales erunt." (Clavius, p. 567).

[18]) „Si magnitudines incommensurabiles fuerint, similiter aequeponderabunt, si in distantijs suspendantur, quae proportionem inter se magnitudinem mutuam habuerint"; p. 127 de l'édition de Bâle, citée p. 274, note 3. (Heiberg, T. II, p. 159).

[19]) Voir la note 6, p. 294.

gulo ſub ΥV, ΩΔ. Sed idem rectangulum SDP [Fig. 8 ſive 10] æquale oſtenſum fuit duplo rectangulo ſub XΥ, ZΛ; ergo æquale eſt rectangulum ſub ΥV, ΩΔ, rectangulo ſub XΥ, ZΛ. Eſt itaque ΥV ad ΥX, ut ΛZ ad ΩΔ*); verùm ut ΛZ ad ΩΔ, ita eſt parallelogrammum ΣΤ ad RQ; itaque & ΥV eſt ad ΥX ut parallelogrammum ΣΤ ad RQ parallelogr. Sunt autem puncta X & V centra gravitatis dictorum parallelogrammorum; ergo magnitudinis ex utroque parallegrammo compoſitæ centrum gravitatis eſt punctum Υ**). Eâdem ratione oſtendi poteſt de reliquis omnibus parallelogrammis, quod duorum quorumlibet oppoſitorum centrum gravitatis eſt in linea OΞ. Ergo totius magnitudinis quæ ex duabus figuris utrimque ordinatè circumſcriptis componitur, centr. gravitatis in eadem OΞ reperiri neceſſe eſt. Sed ejuſdem compoſitæ magnitudinis centrum gravit. eſt quoque in recta BDG, quoniam in ea ſunt centra gravitatis utriuſque figuræ circumſcriptæ***); igitur magnitudinis ex dictis figuris compoſitæ centrum grav. eſt ipſum punctum F. Poſitum autem fuit L punctum centrum gravitatis ejus magnitudinis quæ ex portione ABC & KFH triangulo componitur; igitur magnitudinis reliquæ, compoſitæ ex duobus reſiduis, quæ in figuris circumſcriptis remanent, erit centr. grav. in producta LF, ubi ea ſic terminatur, ut pars adjecta habeat ad FL eandem rationem quam portio ABC ſimul cum KFH triangulo ad dicta duo reſidua †): is autem terminus eſt N; itaque N punctum eſt centrum gravitatis duorum reſiduorum. Quod fieri nequit; Nam ſi per N ducatur recta baſi KH parallela, erunt ab una parte ſpatia omnia è quibus utrumque reſiduum conſtat. Non eſt igitur L punctum centrum gravitatis magnitudinis ex portione ABC & KFH triangulo compoſitæ. Sed neque erit ab altera parte puncti F. Namque hoc ſi dicatur, planè ſimili demonſtratione eò devenietur ut duorum reſiduorum quæ demptâ portione ABC & KFH triangulo, in circumſcriptis figuris ſupererunt, centrum gravitatis ſit ultra portionem ABC; quod eſt æquè abſurdum. Reliquum eſt igitur ut ſit ipſum punctum F quod erat oſtendendum.



[Fig. 10].

*) 16. lib. 6. Elem. ")

**) 7. lib. 1. Archim. de Æquip. ")

***) Theor. 3. h.

†) 8. lib. 1. Archim. de Æquip. ")

Théorème VI.

Tout ſegment d'hyperbole a, au triangle inſcrit de même baſe et de même hauteur, le rapport ſuivant: comme les deux tiers de la ſomme du diamètre de l'hyperbole et du diamètre du ſegment à la diſtance du centre de l'hyperbole au centre de gravité du ſegment.

Soit ABÇ [Fig. 11] le ſegment de l'hyperbole et le triangle inſcrit comme nous avons dit; BD le diamètre du ſegment et BE le diamètre de l'hyperbole, dans le milieu duquel F eſt le centre de la courbe. Et ſuppoſons le centre de gravité du ſegment au point L. Je dis que le ſegment a le même rapport au triangle que les deux tiers de ED à FL.

Conſtruiſons, en effet, comme dans le théorème précédent, ſur le diamètre le triangle KFH, c'eſt-à-dire de manière que le carré de FG ſoit égal au rectangle EDB et que la baſe KH ſoit égale et parallèle à la baſe AC; et ſoit M le centre de gravité de ce triangle, FM étant faite égale aux deux tiers de FG *). Le triangle KFH eſt donc au triangle ABC comme FG à BD, mais comme FG à BD ainſi eſt ED à FG, parce que le carré de FG eſt égal au rectangle EDB et comme ED à FG, ainſi ſont les deux tiers de ED aux deux tiers de FG, c'eſt-à-dire FM; donc le triangle KFH eſt au triangle ABC comme les deux tiers de ED à FM. Mais le ſegment d'hyperbole eſt au triangle KFH comme FM à FL **), parce que le ſegment et le triangle KFH ſont équilibre au point F ***) et que L et M ſont leur centres de gravités reſpectifs; on aura donc par la règle de la proportion dérangée: le ſegment eſt au triangle, comme les deux tiers de ED à FL †); ce qu'il fallait démontrer.

*) 14. *livre* 1. *Arch. de aequip.*[20])

**) 7 *livre* 1. *Archim. de Aequipond.*[21])

***) *Theor.* 5.

†) 23. *livre* 5. *Elém.*[22])

Théorème VII.

Tout ſegment d'ellipſe ou de cercle a, au triangle inſcrit de même baſe et de même hauteur, le rapport ſuivant: comme les deux tiers du diamètre du ſeg-

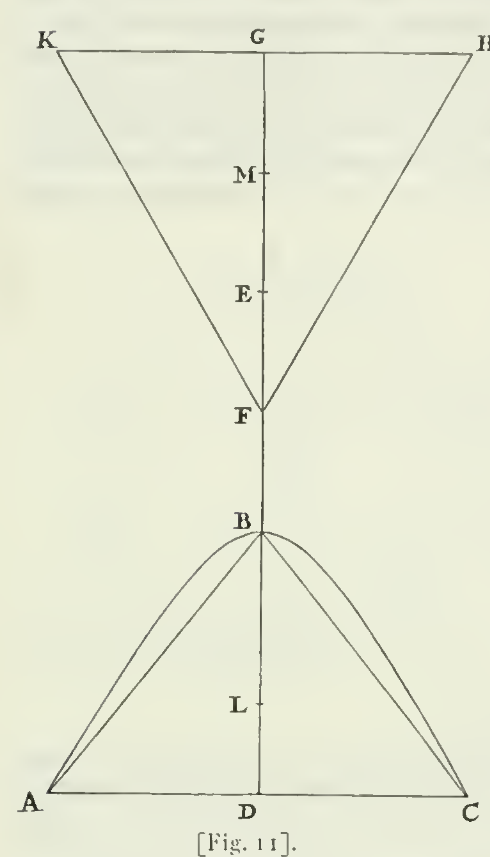
[20]) „Cuiuscunque trianguli centrum gravitatis est punctum, in quo lineae rectae ab angulis ad dimidias bases ductae concurrunt"; p. 132 de l'édition de Basle. (Heiberg, T. II, p. 183).

[21]) Voir la note 18, p. 302.

[22]) „Si sint tres magnitudines, aliaeque ipsius aequales numero, quae binae in eadem ratione sumantur, fuerit autem perturbata earum proportio: Etiam ex aequalitate in eadem ratione erunt." (Clavius, p. 515). Le theorème semble assez obscur; mais de la démonstration, qui y appartient, on peut conclure qu'il a le sens suivant: S'il y a trois quantités a, b, c (comme ici le segment hyperbolique ABC, le triangle KFH et le triangle ABC) et trois autres d, e, f, (comme ici les lignes $\frac{2}{3}$ ED, FM et FL) et qu' on aît $a : b = e : f$, et en même temps $b : c = d : e$; alors on a $a : c = d : f$.

Theorema VI.

Omnis hyperboles portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipſa baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſquialtera duarum, lateris tranſverſi & diametri portionis, ad eam quæ ex centro ſectionis ducitur ad portionis centrum gravitatis.



[Fig. 11].

Eſto hyperboles portio, & inſcriptus ei, qualem diximus, triangulus ABC; diameter autem portionis ſit BD, & latus tranſuerſum ſive diameter ſectionis BE, in cujus medio centrum ſectionis F. Et ponatur centrum gravitatis in portione punctum L. Dico portionem ad inſcriptum triangulum ABC eam habere rationem, quam duæ tertiæ totius ED ad FL.

Conſtituatur enim ad diametrum, ut in præcedentibus, triangulus KFH; ſcilicet ut quadratum FG æquetur rectangulo EDB, & ut baſis KH ſit baſi AC æqualis & parallela: ejuſque trianguli ſit centrum gravitatis M, ſumptâ nimirum FM æquali duabus tertiis lineæ FG *). *) 14. lib. 1. Arch. de æquip. [20]

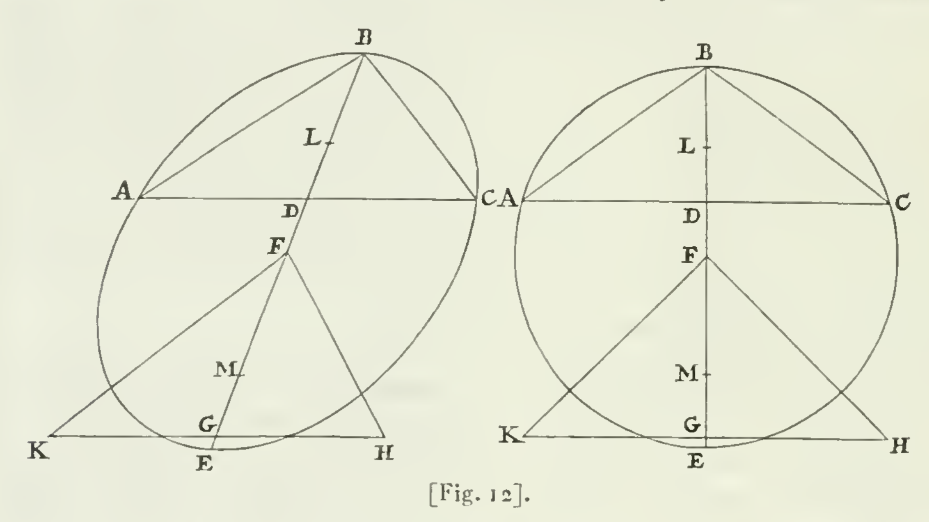
Eſt itaque triangulus KFH ad ABC triangulum ut FG ad BD; verùm ut FG ad BD, ita eſt ED ad FG, quia quadratum FG æquale eſt rectangulo EDB; & ut ED ad FG, ita ſunt duæ tertiæ ED ad duas tertias FG, id eſt FM; ergo triangulus KFH ad triangulum ABC, ut duæ tertiæ ED ad FM. Eſt autem portio hyperboles ad triangulum KFH, ut FM ad FL **), quoniam æquilibrium portionis & trianguli KFH eſt in puncto F ***), & centra gravitatis ſingulorum puncta L & M; ex æquali igitur in proportione perturbata erit portio ad triangulum ABC, ut duæ tertiæ lineæ ED ad FL †): quod erat demonſtrandum. **) 7. lib. 1 Archim. de Æquip. [21] ***) Theor. 5. h. †) 23. lib. 5. Elem. [22])

Theorema VII.

Omnis ellipſis vel circuli portio ad triangulum inſcriptum, eandem cum ipsa baſin habentem eandemque altitudinem, hanc habet rationem; quam ſubſeſqui-

ment reſtant à la droite menée du centre de la courbe au centre de gravité du ſegment.

Soit ABC [Fig. 12] le ſegment d'ellipſe ou de cercle, ſuppoſés d'abord pas plus grands que la moitié de la figure, et le triangle inſcrit ayant la même baſe et la même hauteur que le ſegment; ſoit BD le diamètre du ſegment, lequel ſoit prolongé et paſſera évidemment par le centre de la courbe, qui ſoit F. Soit DE le diamètre du ſegment reſtant. Et ſuppoſons le point L centre de gravité du ſegment ABC. Je dis donc que le ſegment eſt au triangle ABC qui lui eſt inſcrit comme les deux tiers de ED à FL. Décrivons comme précédemment le triangle



[Fig. 12].

KFH, de manière que la baſe KH ſoit égale et parallèle à la baſe AC et que le carré de FG, tirée du ſommet vers le milieu de la baſe, ſoit égal au rectangle BDE [23]; et ſoit le point M le centre de gravité du triangle KFH, FM étant fait égal aux deux tiers de FG *).

Le triangle KFH eſt donc au triangle ABC comme FG à BD; mais comme FG à BD, ainſi eſt ED à FG, parce que le carré de FG eſt égal au rectangle BDE, et comme ED à FG ainſi ſont les deux tiers de ED aux deux tiers de FG, c'eſt-à-dire à FM. Donc le triangle KFH eſt au triangle ABC comme les deux tiers de ED à FM. Mais le ſegment ABC eſt au triangle KFH comme FM à FL **) puiſqu'ils ſont d'équilibre en F ***), et que leurs centres de gravité ſont reſpectivement aux points L et M. Donc, par la règle de la proportion dérangée, le ſegment ABC ſera au triangle ABC, comme les deux tiers de ED à FL †).

Soit maintenant le ſegment plus grand que la figure [Fig. 13]. Je dis qu'il aura de nouveau la même proportion au triangle inſcrit que les deux tiers de ED à FL.

Car poſons que H ſoit le centre de gravité du ſegment reſtant AEC et tirons AE,

*) 14. *livre* 1. *Archim. de aequip.*

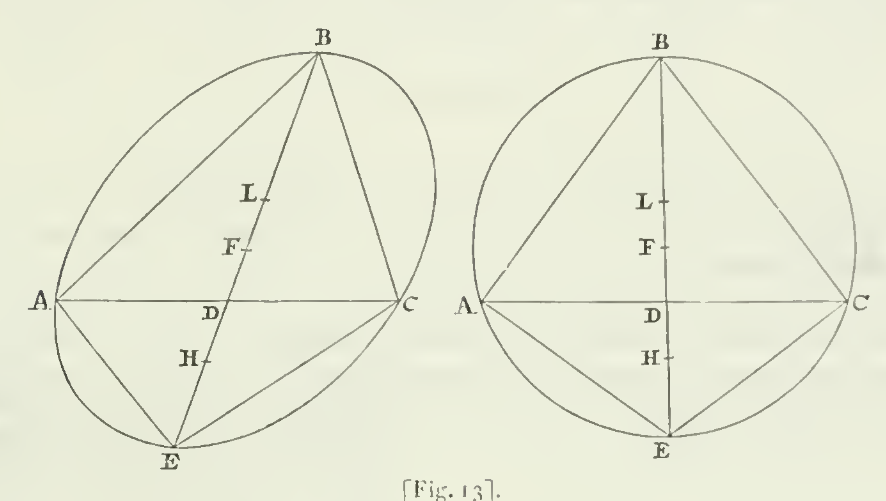
**) 7. *livre* 1. *Archim. de Aequipond.*

***) *Theor.* 5.

†) 23. *livre* 5. *Elém.*

altera diametri portionis reliquæ, ad eam quæ ex figuræ centro ducitur ad centrum gravitatis in portione.

Esto ellipsis vel circuli portio primùm dimidiâ figurâ non major, & inscriptus ei triangulus ABC [Fig. 12], eandem cum portione basin habens, eandemque altitudinem; diameter autem portionis sit BD, quæ producatur, & manifestum est quod transibit per centrum figuræ; sit hoc F, & diameter portionis reliquæ DE. Et ponatur centrum gravitatis in portione ABC punctum L. Dico igitur portionem ad inscriptum sibi triangulum ABC eam habere rationem, quam duæ tertiæ ED ad FL. Constituatur enim ut supra triangulus KFH, cujus nimirum basis KH



[Fig. 13].

sit basi AC æqualis & parallela, & FG quæ à vertice ad mediam basin pertingit possit rectangulum BDE [23]): & centrum gravitatis trianguli KFH sit M punctum, sumptâ scilicet FM æquali duabus tertiis lineæ FG *). *) 14. lib. 1. Arch. de æquip.

Triangulus igitur KFH est ad triangulum ABC, ut FG ad BD; ut autem FG ad BD, sic est ED ad FG, quia quadratum FG æquale est BDE rectangulo; & ut ED ad FG, sic sunt duæ tertiæ ED ad duas tertias FG, id est, ad FM. Ergo triangulus KFH, ad triangulum ABC, sicut duæ tertiæ ED ad FM. Portio autem ABC est ad triangulum KFH, ut FM ad FL **), quoniam æquilibrium eorum est in F***), & centra gravitatis singulorum puncta L & M; Ergo ex æquali in proportione perturbata, erit portio ABC ad ABC triangulum, sicut duæ tertiæ ED ad FL †). **) 7. lib. 1. Archim. de Æequip. ***) Theor 5. h. †) 23. lib. 5. Elem.

Sit nunc portio ABC [Fig. 13] dimidiâ figurâ major. Dico eam rursus ad inscriptum triangulum eam habere rationem, quam duæ tertiæ ED ad FL.

Ponatur enim portionis reliquæ AEC centrum gravitatis H punctum, & jun-

[23]) Voir la note 10, p. 298.

EC. Donc, par ce que nous venons de montrer, le fegment AEC fera au triangle AEC, comme les deux tiers de BD à FH; mais comme le triangle AEC eft au triangle ABC, ainfi eft ED à BD, ou les deux tiers de ED aux deux tiers de BD; par la règle de la proportion dérangée on aura donc: comme le fegment AEC eft au triangle ABC, ainfi les deux tiers de ED à FH *). Mais comme le fegment ABC eft au fegment AEC ainfi eft FH à FL **), parce que de la figure entière le centre de gravité eft F, et L et H font ceux des dits fegments. Donc de nouveau par la règle de la proportion dérangée, le fegment ABC fera au triangle ABC comme les deux tiers de ED à FL. Donc tout fegment d'ellipfe ou de cercle etc. Ce qu'il fallait démontrer.

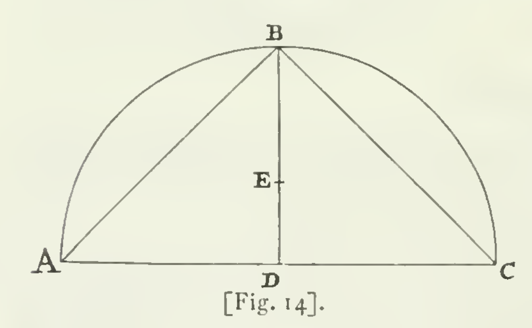
*) 23. *livre* 5. *Elém.* [22])

**) 8. *livre* 1. *Arch. de Aequipond.* [23])

Théorème VIII.

Dans un demi-cercle et dans un fecteur de cercle quelconque l'arc a le même rapport aux deux tiers de la corde que le rayon à la droite menée du centre au centre de gravité du fecteur.

Soit, en premier lieu, ABC le demi-cercle décrit du centre D et divisé en deux parties égales par BD, dans laquelle le centre de gravité foit E ***). Je dis que l'arc ABC eft aux deux tiers de AC comme BD à DE. Tirons AB et BC. Donc comme le demi-cercle est au triangle ABC ainfi font les deux tiers de BD à DE †), car BD eft égal au diamètre du fegment reftant. Mais également comme le demi-cercle, c'est-à-dire comme le triangle, ayant la bafe égale à l'arc ABC et la hauteur BD, au triangle ABC, ainfi eft l'arc ABC à la droite AC, donc auffi comme l'arc ABC eft à AC, ainfi font les deux tiers de BD à DE et en permutant, comme l'arc ABC eft aux deux tiers de BD, ainfi eft AC à DE ou bien $\frac{2}{3}$ AC à $\frac{2}{3}$ DE, d'où en permutant de nouveau: comme l'arc ABC à $\frac{2}{3}$ AC, ainfi $\frac{2}{3}$ BD à $\frac{2}{3}$ DE ou encore BD à DE.



[Fig. 14].

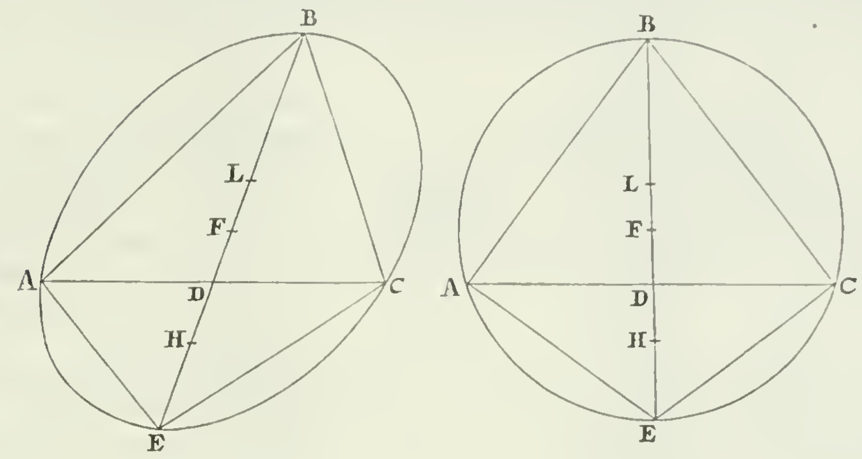
***) *Théor.* 4.

†) *Théor.* 7.

Soit enfuite DABC [Fig. 15] un fecteur moindre que le demi-cercle, divifé en

[24]) Voir la note 6, p. 294.

gantur AE, EC. Igitur per ea quæ jam oſtendimus, erit portio AEC ad AEC triangulum, ut duæ tertiæ BD ad FH: verùm ut triangulus AEC ad triangulum



[Fig. 13].

ABC, ſic eſt ED ad BD, ſive duæ tertiæ ED ad duas tertias BD; ex æquali igitur in proportione perturbata, erit ſicut portio AEC ad triangulum ABC, ita duæ tertiæ ED ad FH *). Sed ut portio ABC ad AEC portionem ita eſt FH ad FL **), quoniam totius figuræ centrum gravitatis eſt F, centraque dictarum portionum L & H; Ergo iterum ex æquali in proportione perturbata, erit portio ABC ad ABC triangulum, ut duæ tertiæ ED ad FL. Omnis igitur Ellipſis vel circuli portio &c. Quod erat demonſtrandum.

*) 23. *lib.* 5. *Elem.*

**) 8. *lib.* 1. *Arch. de aequipond.*

Theorema VIII.

In ſemicirculo & quolibet circuli ſectore, habet arcus ad duas tertias rectae ſibi ſubtensae hanc rationem, quam ſemidiameter ad eam, quæ ex centro ducitur ad ſectoris centrum gravitatis.

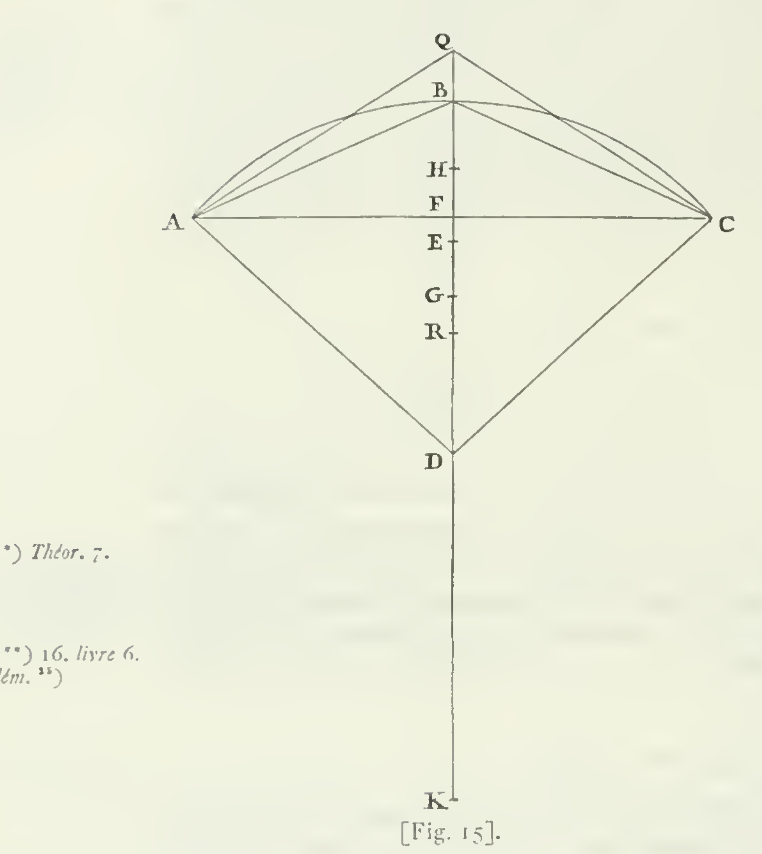
Eſto primùm ſemicirculus ABC [Fig. 14], deſcriptus centro D, ſectusque bifariam rectâ DB, in qua centrum gravitatis ſemicirculi ſit E ***). Dico arcum ABC eſſe ad duas tertias AC, ſicut BD ad DE. Jungantur enim AB, BC. Igitur, ut ſemicirculus ad triangulum ABC, ſic ſunt duæ tertiæ BD ad DE †), eſt enim BD æqualis diametro portionis reliquæ. Verùm etiam ut ſemicirculus, id eſt, ut triangulus habens baſin æqualem arcui ABC & altitudinem BD, ad ABC triangulum, ita eſt arcus ABC ad AC rectam; ergo ut arcus ABC ad AC, ita ſunt duæ tertiæ BD ad DE, & permutando, ut arcus ABC ad duas tertias BD, ita AC ad DE, ſive ita $\frac{2}{3}$ AC ad $\frac{2}{3}$ DE, unde rurſus permutando, ut arcus ABC ad $\frac{2}{3}$ AC, ita $\frac{2}{3}$ BD ad $\frac{2}{3}$ DE, ſive ita, BD ad DE.

***) *Theor.* 4. *h.*

†) *Theor.* 7 *h.*

Sit deinde ſector DABC [Fig. 15], ſemicirculo minor, bifariam ſectus rectâ

deux parties égales par la droite DB, dans laquelle le centre de gravité du fecteur foit fuppofé fe trouver en E, et foit tirée la corde AC. Je dis de nouveau que l'arc ABC eft aux deux tiers de la droite AC comme BD à DE. Car fi nous tirons AB, BC et que le diamètre du cercle entier eft KDB prolongé jusqu à Q, de forte que QF eft à BF comme le fegment ACB au triangle ABC, et fi l'on tire AQ, QC, le triangle AQC fera maintenant égal au fegment ACB. Suppofons enfuite que G foit le centre de gravité du triangle ACD, et H celui du fegment ACB, et que comme DQ à QF ainfi HD à DR.



[Fig. 15].

Puis donc que, comme le fegment ACB ou le triangle AQC eft au triangle ABC, c'eft-à-dire comme QF à BF, ainfi font les deux tiers de KF à DH *), le rectangle fur QF, DH fera égal aux deux tiers du rectangle KFB **), c'eft-à-dire aux deux tiers du carré AF. Mais le même rectangle fur QF, DH eft égal au rectangle QDR, puifque comme QD à QF nous avons fait DH à DR; le rectangle QDR eft donc égal au deux tiers du carré AF, donc comme QD à AF ainfi $\frac{2}{3}$ AF à DR***); mais comme QD à AF, ainfi eft auffi le rectangle fur QD, AF, auquel eft égal le quadrilatère DAQC, c'eft-à-dire le fecteur DABC, au carré AF, d'où le fecteur DABC eft auffi au carré AF comme $\frac{2}{3}$ AF à DR. Puis, comme E eft le centre de gravité du fecteur entier et H le centre de gravité du fegment ACB, G celui du triangle ACD, il paraît que comme le triangle ACD eft au fegment ACB ou au triangle AQC, c'eft-à-dire comme DF à FQ, ainfi HE à EG †); donc, par converfion et par compofition des rapports, DQ fera à DF comme GH à HE. Mais puisque nous avons fait comme DQ à QF ainfi HD à DR, on aura auffi par converfion des rapports comme DQ à DF, ainfi HD à HR; donc HD à HR comme GH à HE, donc auffi la droite reftante GD à la droite reftante ER comme HD à HR ††) c'eft-à-dire comme DQ à DF. Mais comme DQ à DF ainfi eft le

*) *Théor.* 7.

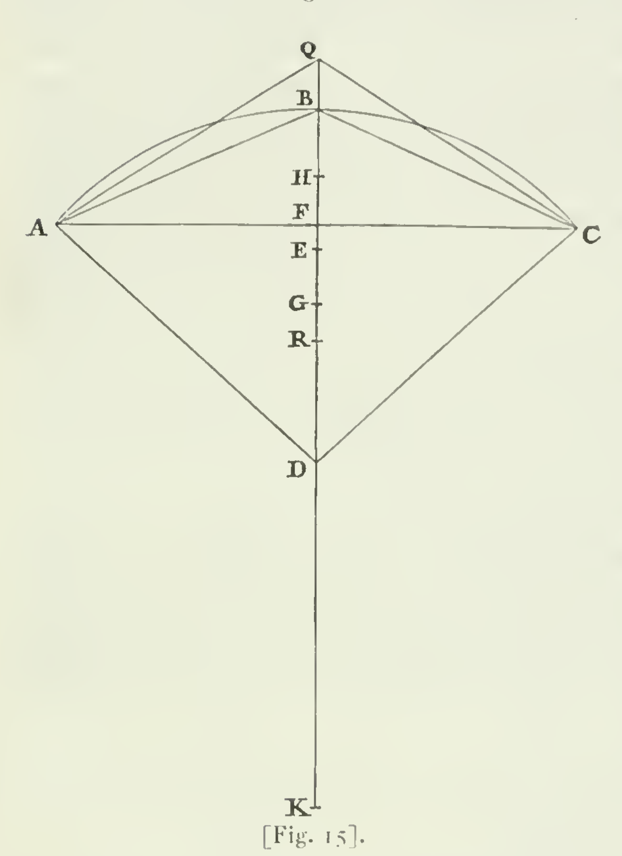
**) 16. *livre* 6. *Elém.* [25])

***) 16. *livre* 6. *Elém.*

†) 8. *livre* 1. *Arch. de Aequipond.* [24])

††) 19. *livre* 5. *Elem.* [26])

DB, in qua ſectoris centrum gravitatis ponatur E punctum, & ducatur ſubtenſa AC. Dico rurſus, arcum ABC ad duas tertias rectæ AC eam habere rationem, quam BD ad DE. Jungantur enim AB, BC, & totius circuli ſit diameter KDB, quæ producatur in Q, ut fiat QF, ad BF, ſicut portio ACB ad ABC triangulum, & jungantur AQ, QC; erit jam triangulus AQC portioni ACB æqualis. Ponantur deinde centra gravitatis, G trianguli ACD, & H portionis ACB; & ſicut DQ ad QF, ita ſit HD ad DR.



[Fig. 15].

Quia igitur ſicut portio ACB ſive triangulus AQC ad triangulum ABC, id eſt, ut QF ad BF, ita $\frac{2}{3}$ KF ad DH *), erit rectangulum ſub QF, DH, æquale duabus tertiis rectanguli KFB **), id eſt, duabus tertiis quadrati AF; ſed idem rectangulum ſub QF, DH, æquale eſt rectangulo QDR, quia ut QD ad QF, ita fecimus eſſe DH ad DR; ergo rectangulum QDR æquale duabus tertiis quadrati AF, ideoque ut QD ad AF ita $\frac{2}{3}$ AF ad DR ***): ſed ut QD ad AF, ſic quoque eſt rectangulum ſub QD, AF, cui æquale quadrilaterum DAQC, id eſt, ſector DABC ad AF quadratum; ergo & ſector DABC ad quadratum AF, ut $\frac{2}{3}$ AF ad DR. Porrò quoniam E centrum gravitatis eſt totius ſectoris, et H centrum grav. portionis ACB, G verò trianguli ACD, conſtat eſſe, ſicut triangulus ACD ad ACB portionem ſive ad triangulum AQC, id eſt, ut DF ad FQ, ita HE ad EG †); quare convertendo & per compoſitionem rationis erit ut DQ ad DF, ita GH ad HE. Sed quia fecimus ut DQ ad QF, ita HD ad DR, erit quoque per converſionem rationis, ut DQ ad DF, ita HD ad HR; ergo HD ad HR ut GH ad HE; quare & reliqua GD ad reliquam ER, ut HD ad HR ††), hoc eſt,

*) *Theor.* 7 *h.*

**) 16. *lib.* 6. *Elem.* [25])

***) 16. *lib.* 6. *Elem.*

†) 8. *lib.* 1. *Arch. de Æquipond.* [25])

††) 19. *lib.* 5. *Elem.* [26])

[25]) Voir la note 17, p. 302.

[26]) „Si quemadmodum totum ad totum, ita ablatum se habuerit ad ablatum: & reliquum ad reliquum, vt totum ad totum se habebit." (Clavius, p. 510).

quadilatère DAQC, auquel eſt égal le ſecteur DABC, au triangle ACD; donc le ſecteur DABC eſt au triangle ACD comme GD à ER. Mais le triangle ACD eſt au carré DF comme AF à DF ou comme $\frac{2}{3}$ AF á $\frac{2}{3}$ DF ou DG. Donc par la règle de la proportion dérangée: comme le ſecteur DABC eſt au carré DF ainſi $\frac{2}{3}$ AF à ER †††) et par converſion, le carré DF au ſecteur DABC comme ER à $\frac{2}{3}$ AF. Mais il a été montré antérieurement que le carré AF eſt au ſecteur DABC comme DR à $\frac{2}{3}$ AF; donc la ſomme des deux carrés DF et AF, ou le ſeul carré DA, eſt au ſecteur DABC comme la ſomme de ER et RD, c'eſt-à-dire la droite entière ED à $\frac{2}{3}$ AF §). Mais le carré DA eſt auſſi au ſecteur DABC comme la droite DA à l'arc AB, puiſque, en effet, le ſecteur DABC eſt égal au rectangle ayant une baſe égale à l'arc AB et la hauteur DA, donc comme DA à l'arc BA ainſi ED à $\frac{2}{3}$ AF; ou permutant: l'arc AB à $\frac{2}{3}$ AF, ou l'arc ABC à $\frac{2}{3}$ AC comme DA ou BD à DE.

†††) 23. *livre* 5. *Elém.* [27])

§) 24. *livre* 5. *Elém.* [28])

Soit maintenant enfin le ſecteur DABC [Fig. 16] plus grand que le demi-cercle, et faiſons les mèmes ſuppoſitions qu' auparavant, et ſoit complété le cercle BAFC, ſoit BDF le diamètre du cercle complet, dans lequel ſe trouvera auſſi le centre de gravité, soit G, du ſecteur reſtant DAFC *).

*) 8. *livre* 1. *Arch. de Aequip.* [29])

Puis donc que le centre de gravité du cercle entier eſt D, et E et G les centres de gravité des deux ſecteurs, le ſecteur DABC ſera au ſecteur DAFC, ou bien l'arc ABC à l'arc AFC comme GD à DE **), mais comme l'arc AFC à $\frac{2}{3}$ AC ainſi eſt DF à DG ainſi qu'il a été montré tantôt, donc, pas la règle de la proportion dérangée, comme l'arc ABC à $\frac{2}{3}$ AC ainſi ſera DF ou AD à DE ***). Il paraît donc que dans le demi-cercle et dans un ſecteur de cercle quelconque etc., ce qu'il fallait démontrer.

**) 8. *livre* 1. *Arch. de Aequip.* [29])

***) 23. *livre* 5. *Elém.* [27])

[27]) Voir la note 22, p 304.

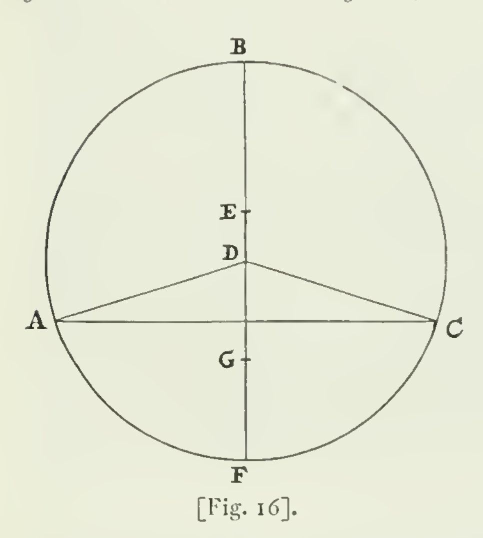
[28]) „Si prima ad secundam eandem habuerit rationem, quam tertia ad quartam; habuerit autem & quinta ad secundam eandem rationem, quam sexta ad quartam: Etiam composita prima cum quinta, ad secundam eandem habebit rationem, quam tertia cum sexta, ad quartam.” (Clavius, p. 516).

[29]) Lisez plutôt: *Theor.* 4 *h.*

ut DQ ad DF. Sicut autem DQ ad DF, ita eſt quadrilaterum DAQC, cui æqualis ſector DABC ad ACD triangulum; igitur sector DABC ad ACD triangulum ut GD ad ER: Eſt autem ACD triangulus ad DF quadratum, ut AF ad DF, ſive ut $\frac{2}{3}$ AF ad $\frac{2}{3}$ DF id eſt DG. Igitur ex æquali in proportione perturbata, ſicut ſector DABC ad quadratum DF, ita $\frac{2}{3}$ AF ad ER †††), & convertendo, quadratum DF ad ſectorem DABC, ut ER ad $\frac{2}{3}$ AF. Fuit autem ante oſtenſum, quadratum AF eſſe ad ſectorem DABC, ut DR ad $\frac{2}{3}$ AF; igitur duo ſimul quadrata, DF & AF, ſive unum quadratum DA ad ſectorem DABC ut duæ ſimul ER & RD, id eſt ut tota ED ad $\frac{2}{3}$ AF §). Eſt verò etiam quadratum DA ad DABC ſectorem, ſicut linea DA ad arcum AB, quia nimirum ſector DABC æqualis eſt rectangulo, baſin habenti æqualem arcui AB & altitudinem DA; ergo ſicut DA ad arcum AB, ita ED ad $\frac{2}{3}$ AF; & permutando, arcus AB ad $\frac{2}{3}$ AF, ſive arcus ABC ad $\frac{2}{3}$ AC, ut DA vel BD ad DE.

†††) 23. lib. 5. Elem. [27])

§) 24. lib. 5. Elem. [28])



[Fig. 16].

Eſto jam denique ſector DABÇ [Fig. 16] ſemicirculo major, & ponantur ea quæ priùs, & perficiatur circulus BAFC, & totius diameter ſit BDF, in qua erit quoque centrum grav. ſectoris reliqui DAFC *), quod ſit G.

Quia igitur circuli totius centrum gravitatis eſt D, & duorum ſectorum centra grav. E & G, erit ſicut ſector DABC, ad ſectorem DAFC, id eſt ſicut arcus ABC ad arcum AFC, ita GD ad DE **): verùm ut arcus AFC ad $\frac{2}{3}$ AC, ita eſt DF ad DG, ſicuti modò oſtenſum eſt; ergo ex æquali in proportione perturbata, ſicut arcus ABC ad $\frac{2}{3}$ AC, ita erit DF vel BD ad DE ***). Conſtat itaque quod in ſemicirculo & quolibet circuli ſectore &c. quod erat demonſtrandum.

*) 8. *lib.* 1. *Arch. de Æquip.* [29])

**) 8. *lib.* 1. *Arch. de Æquip.* [30])

***) 23. *lib.* 5. *Elem.* [31])

EXAMEN DE LA CYCLOMÉTRIE

du très ſavant

GRÉGOIRE DE SAINT-VINCENT, S.J.,

publiée en l'an 1647.[1])

Il y a environ cinq ans le très-ſavant et en Geométrie très-célèbre Grégoire de Saint-Vincent[2]) propoſa quatre modes pour carrer le Cercle, et même en appliqua auſſi à laquadrature de l'Hyperbole un, au ſujet duquel, par pluſieurs indices, on peut conclure qu'il fut eſtimé par lui-même meilleur que les autres. Un de ces indices eſt juſtement qu'il démontra par ce même mode deux quadratures de figures différentes, un autre que ce mode eſt beaucoup plus évident que les trois autres et par cela même devrait paraître beaucoup moins ſujet à erreur; puis encore jusqu'à certain point en ce qu'il le produiſit en premier lieu; enfin le plus fort indice conſiſte en ceci que, dans ce qu'il dit dans la préface au lecteur laquelle précède l'ouvrage entier, là où il expoſe brièvement l'hiſtoire et le progrès de ſon invention, il ne mentionne aucun mode en dehors de ce ſeul[3]). Il eſt vrai qu'il a pu avoir une autre raiſon de paſſer ſous ſilence les trois quadratures ſuivantes, nommément qu'il ſavait que des mêmes principes toutes les quatre étaient déduites et demontrées. Mais il m'a ſemblé que l'une ou l'autre de ces conſidérations ſuffiſait pour

---

[1]) Ouvrage cité dans la note 6, p. 53 du T. I.

[2]) Voir, sur Grégoire de Saint Vincent, la note 5, p. 53 du T. I.

[3]) Voici les passages de la „Praefatio ad benevolum lectorem" qui se rapportent à la quadrature prétendue du cercle et de l'hyperbole. Après avoir mentionné quelques efforts infructueux, Grégoire fait suivre: „Inde igitur rursus ad noua consilia conuersus, reperi tandem materiam eam quae de corporibus agit, ab antiquis inchoatam, planè imperfectam in ipsis adhuc haerere incunabilis: nescio tamen quae meae hac in parte lux menti obiiceretur, & ad noua rursus studia animos daret. Totum igitur me in corporum contemplationem, efformationem, comparationem, peruigili multorum annorum curà contuli, ut tandem aliquam mihi viam complanarem, qua ad montem hunc, imperuium hactenus, possem eniti. Res ex sententia tandem sucessit, complanaui quod potui omnia; an autem apicem ipsum attigerim docebit res."

Ensuite, après avoir esquissé le contenu et la raison d'être des huit premiers Livres de son ouvrage Grégoire poursuit: „Hisce itaque rite expositis, tum demum ad Quadraturas varias, ac demum Circuli, quas reliquis libris absoluo, hoc fere tenore me accingo. In libro de Parabola conscripto, sectiones produco Parabolicas, praeter alias, illas quoque quas circulus mihi offerebat. dein ex illis duas semiparabolas aequales assumo,

ΕΞΕΤΑΣΙΣ

CYCLOMETRIAE

CLARISSIMI VIRI,

GREGORII à S. VINCENTIO, S. J.

Editæ Anno D. cIɔ Iɔc XLVII. [1])

Ante quinquennium circiter Vir eruditissimus & Geometriâ celeberrimus, Gregorius à S. Vincentio [2]), quatuor modos proposuit quadrandi Circulum, unum verò eorum etiam Quadraturæ Hyperboles applicavit: quem cæteris potiorem ab ipso existimari ex multis indiciis colligere licet. Unum est hoc ipsum quod duas diversarum figurarum quadraturas per eundem hunc demonstravit, alterum quod evidentior multò sit hic modus quam reliqui tres, ideoque minus errori obnoxius videri debuerit; nonnullum etiam quod primo eum loco produxit; Et denique hoc maximum est, quod in iis quæ ad lectorem in principio totius operis præfatur, ubi suæ inventionis historiam & progressum paucis exposuit, nullius modi præter hunc unum meminerit [3]). Potuit autem & aliam rationem habuisse tres posteriores quadraturas illic silentio prætereundi, eam videlicet, quod quatuor omnes sciret ex iisdem principiis deductas & demonstratas esse. Sed mihi vel alterutra harum considerationum sufficere visa est, ut persuaderet unam pro omnibus fore discussio-

---

altitudinem verò habentes eam quam latus rectum ipsius axis exhibet; quae in se invicem subalternè ductae, corpus producunt aequale semicylindro, cuius basis semicirculus est, ex quo Parabolae illae oriuntur, & altitudo Parabolis communis, vti in libro de planorum ductibis, septimo nempè, demonstro. Tandem partes corporis orti ex Parabolis proposito modo ductis, per Proportionalitates confero cum partibus cylindri cui corpus illud aequale est. notà autem ratione partium corporis Parabolici, innotescit ratio partium cylindri quae illis aequales sunt. Quare, cùm partium cylindricarum bases, quae sunt circuli segmenta, parallelis lineis intercepta, eandem inter se proportionem habeant quam partes ipsae cylindricae, nota etiam fit proportio segmentorum circularium, quae inter parallelas lineas sunt posita. Tum denique ex segmentorum illorum eà notà proportione, nullo negocio circuli ad rectilineum proportionem exhibeo. Eadem penè ratione Hyperbolae quadraturam exhibeo, per Parabolas parallelas in se ductas, quae cylindro aequantur hyperbolico."

Ce n'est pas sans raison que Grégroire ajoute: „Atque haec est operis totius adumbratio. „*obscura* adhuc & tenuis"; toutefois, après avoir pris connaissance de ce qui va suivre, on reconnaîtra dans le second passage une description succincte de la quadrature, critiquée par Huygens.

perſuader, qu'il y aurait une ſeule diſcuſſion valable pour toutes laquelle, détruiſant la première quadrature, entraînerait les autres à ſa ſuite.

Car ſi nous avons montré qu'il y a erreur dans celle qui eſt la moins obſcure, je ne vois pas pour quelle raiſon un meilleur ſuccès ſe laiſſerait eſpérer pour les trois ſuivantes, qui ſe trouvent enveloppées des plus grandes ténèbres et que l'Auteur lui-même ſemble mettre au-deſſous de cette ſeule première.

Les principes que j'ai dit être communs à toutes les quadratures ſont les nouvelles inventions concernant les Proportionalités Géométriques ou les Proportions des proportions [4]), et sur les ſolides produits par deux figures planes [5]). Lesquelles certes je ne combattrai point, car j'eſtime permis auſſi bien de conſidérer dans la géométrie des corps ſolides quelconques, que d'employer toute autre choſe que nous croyons pouvoir être ſeulement de quelque utilité dans la recherche de la vérité. Cependant je ne puis laiſſer de dire au moins ceci, que le très-ſavant auteur n'a pas appliqué avec aſſez de bonheur quelques inventions en matière de Proportionalités aux Quadratures et que, dans mon opinion, c'eſt là la cauſe de ſon erreur. C'eſt ce que j'avais obſervé tout premièrement dans la propoſition 39 du livre 10 de l'Opus Geometricum.[6]) Car en prenant les nombres choiſis au hasard 2, 3, 4, 5, puis leurs carrés 4, 9, 16, 25 et les carrés des carrés 16, 81, 256, 625, je voyais qu'à ces douze nombres s'applique la même démonſtration que celle écrite dans la propoſition 39 au ſujet d'autant de parallélipipèdes. Et comme pourtant la concluſion n'admettait aucune interprétation plauſible [7]) je ne doutais pas que ſon argumentation auſſi bien que la mienne que j'avais formulée dans les mêmes termes [8]) contenait quel-

[4]) Il s'agit du „Liber octauus De Proportionalitatibus geometricis." (p. 865—954).

[5]) Consultez, sur cette opération, le § 4, p. 278 de l'„Aperçu de la première quadrature de Grégoire de St. Vincent." Il s'agit ici du „Liber septimus De ductu plani in planum." (p. 703—864).

[6]) Ici. dans l'exemplaire que nos possédons, Huygens a annoté avec la plume: „In hac propos.^e 39.^a etiam Cartesius paralogismum ostendit epist. ad Scotenium." Comparez les Lettres N°. 169 et 170, pp. 258 et 259 du T. I et surtout la note 2 de la Lettre N°. 169. L'annotation doit avoir été ajoutée après le 13 décembre 1653, date de la Lettre N°. 169.

[7]) Comparez le § 10 de l'„Aperçu de la première quadrature du cercle de Grégoire de St. Vincent", p. 280 du Tome présent. En effet, si les quatre premiers nombres 2, 3, 4, 5 représentent les volumes des solides $R\delta$, γX, $R'\delta'$, $\gamma'X'$ de la figure de la page 278; les quatre suivants 4, 9, 16, 25, ceux des solides $S\varepsilon$, βV, $S'\varepsilon'$, $\beta'V'$ et les quatres derniers 16, 81, 256, 625 ceux des solides $G\eta$, αP, $G'\eta'$, $\alpha'P'$ égaux respectivement à ceux des douze parallélipipèdes en question; alors les rapports $\frac{G\eta}{G'\eta'} = \frac{16}{256}$ et $\frac{\alpha P}{\alpha' P'} = \frac{81}{625}$ contiennent respectivement autant de fois (c'est-à-dire deux fois) les rapports $\frac{S\varepsilon}{S'\varepsilon'} = \frac{4}{16}$ et $\frac{\beta V}{\beta' V'} = \frac{9}{25}$, que ceux-ci contiennent les rapports $\frac{R\delta}{R'\delta'} = \frac{2}{4}$; $\frac{\gamma X}{\gamma' X'} = \frac{3}{5}$. Mais en sommant deux à deux les solides en question la démonstration de Grégoire exigerait, si elle était rigoureuse, que le rapport $\frac{GP}{G'P'} = \frac{97}{881}$

nem quæ quadraturam primariam infirmatura esset, reliquarum agmen ducentem. Si enim erratum in ea ostenderimus quæ minus obscuritatis habet, non video quâ ratione melior successus expectandus sit in tribus sequentibus, quæ maximâ caligine involuuntur, quasque Auctor ipse vel uni illi posthabere videtur. Principia quæ communia esse omnibus quadraturis dixi, ea sunt nova inventa de Proportionalitatibus Geometricis sive de Proportionum proportionibus [4]), & de Ductibus plani in planum [5]). Quæ quidem prorsus non impugnabo, nam & solida corpora quæcunque in Geometria considerare licere existimo, & alia omnia adhibere posse, quæ modò ullo auxilio fore credimus ad investigationem veri. Unum tamen prætermittere nequeo quin dicam, Clar. Virum non satis feliciter quædam inventa in materia Proportionalitatum ad Quadraturam applicasse, atque hinc, meâ opinione, ipsi extitisse erroris causam. Primùm omnium id in propos. 39. lib. 10. Oper. Geom. [6]) observaveram. Positis enim numeris fortuitò assumptis, 2, 3, 4, 5; deinde horum quadratis 4, 9, 16, 25; & quadratorum quadratis, 16, 81, 256, 625; videbam duodecim hisce eandem demonstrationem convenire, quæ in dicta prop. 39. scripta est de totidem parallelepipedis. Et quum tamen conclusio nullam idoneam admitteret interpretationem [7]), non dubitabam quin æquè ipsius ac mea argumentatio, quam iisdem verbis formaveram[8]), aliquid absurdi contineret. Poste-

---

contiendrait autant de fois le rapport $\frac{SV}{S'V'} = \frac{13}{41}$, que celui-ci contient le rapport $\frac{RX}{R'X'} = \frac{5}{9}$. Or, il est clair qu'il n'en est rien; donc la démonstration doit être erronée.

[8]) Voici la démonstration de la „Prop. 39" (p. 1121—1123) qu'on obtient en remplaçant les parallélipipèdes, dont il y est question, par les nombres du texte:

„Ostendendum igitur est rationem $\frac{16+81}{256+625}$ toties continere per multiplicationem rationem $\frac{4+9}{16+25}$ quoties haec ipsa continet $\frac{2+3}{4+5}$, quod sic ostendo. Ratio $\frac{16+81}{256+625}$ est eadem cum ratione $\frac{16}{256+625}$ simul cum ratione $\frac{81}{256+625}$ (per [prop.] 8 huius). similiter ratio $\frac{4+9}{16+25}$ eadem est cum ratione $\frac{4}{16+25}$ simul cum ratione $\frac{9}{16+25}$. Denique ratio $\frac{2+3}{4+5}$ eadem est cum ratione $\frac{2}{4+5}$ simul cum ratione $\frac{3}{4+5}$. Sed ratio $\frac{16}{256}$ toties multiplicat rationem $\frac{4}{16}$, quoties ratio $\frac{4}{16}$ continet rationem $\frac{2}{4}$, & ita deinceps ratio $\frac{16}{625}$ toties continet rationem $\frac{4}{25}$, quoties ratio $\frac{4}{25}$ continet rationem $\frac{2}{5}$; & ita consequenter ratio $\frac{81}{256}$ toties continet rationem $\frac{9}{16}$ quoties haec ratio continet rationem $\frac{3}{4}$. Denique toties etiam continet ratio $\frac{81}{625}$ rationem $\frac{9}{25}$ quoties ratio $\frac{9}{25}$ continet $\frac{3}{5}$. Igitur manifestum est quod ratio $\frac{16+81}{256+625}$ toties contineat rationem $\frac{4+9}{16+25}$, quoties haec ipsa ratio continet rationem $\frac{2+3}{4+5}$. Quod fuit demonstrandum."

que chose d'absurde. Mais la partie postérieure de la démonstration[9]) était juste, et par cela même prouvait qu'on avait failli dans la première. Craignant toutefois que de cette manière surgirait entre nous une dispute intriquée et prolixe, j'eus recours à d'autres inventions et rencontrai enfin ce que je résolus de mettre par écrit ici en peu de mots.[10]) Aucune des propositions du très-savant Auteur ne sera l'objet de controverse, mais au contraire en ayant prouvé plusieurs et appliqué à mon usage, je ramènerai la question à ceci que, à moins qu'il ne déclare impossible de conduire sa quadrature à bonne fin et de trouver par elle réellement une figure rectiligne égale au cercle, je lui montrerai de quelle manière cela pourrait ensuite être obtenu très facilement. Après cela en suivant ses propres pas je démontrerai que, par la voie dans laquelle il nous a précédé jusqu'ici, on ne peut parvenir nullement à ce qu'il désire, mais qu'il faut s'arrêter à des conclusions tout à fait absurdes. Mais venons au fait.

Soit F [Fig. 1] le centre d'un cercle dont CD est le diamètre. Et après avoir divisé au point G le rayon FC en deux parties égales, tirons les deux perpendicaires FE, GH. Je dis que, lorsque est donné le rapport du segment CHG au segment GHEF, celui du cercle à l'hexagone régulier[11]) qui lui est inscrit sera également donné. Car menons les droites FH, HC, il est manifeste alors que le triangle FHC sera équilatère, de même que l'arc CE est triple de l'arc HE. Si donc le rapport du segment CHG au segment GHEF est donné, par composition sera donné aussi le rapport du quadrant FEC au segment GHEF. Mais le rapport du secteur FHE au quadrant FHE est également donné, donc est donné aussi le rapport du segment GHEF au secteur FHE, d'où sera donné aussi le rapport du segment GHEF au triangle FHG, par conséquent le rapport du secteur FHE au triangle FHG sera donné. Mais ce dernier rapport est le même que celui du secteur FHC au triangle FCH (parce que ces deux derniers sont respectivement le double des précédents) et le même rapport est celui du cercle à son hexagone régulier inscrit. Ainsi il paraît que ce dernier rapport est également donné, ce qu'il fallait démontrer.

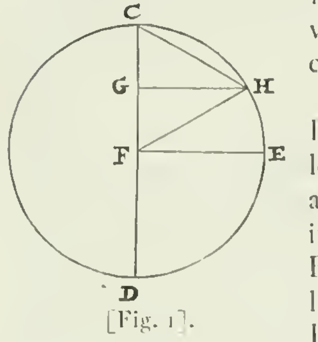
Soient maintenant les droites AB, CD, EF[12]) toutes égales au diamètre CD du cercle et que sur chacune d'elles soient construits deux carrés. Ensuite soient décrits des sommets A et B les demi-paraboles AVG, BTH dont les bases soient les côtés des carrés BG, AH. Dans les deux carrés suivants soient tirées les diagonales CI, DK. Mais dans les deux derniers carrés soient de nouveau décrits des demi-paraboles EΣL, FΠM, dont les sommets soient E et F, mais les axes les côtés EΨ, FΩ des carrés et es bases ΨL, ΩM. Ensuite après avoir divisé en deux parties égales aux points N, O, P les droites premièrement données et les moitiés

---

9) C'est-à-dire toute la partie de la démonstration de la quadrature du cercle qui vient après la „Prop. 39."

10) Après avoir indiqué le lieu précis où la démonstration de Grégorius a fait fausse route,

rior autem demonſtrationis pars [9]) rectè ſe habebat, ideoque arguebat peccatum in priori. Sed veritus ne intricata & prolixa hinc nobis diſputatio oriretur, ad alias inventiones me converti, & tandem ea ſeſe obtulerunt, quæ paucis hic perſcribere conſtitui [10]). Nulla per hæc propoſitionum Cl. Viri in controverſiam vocabitur; ſed contrà multis earum probatis, atque in uſum meum converſis, eò rem deducam, ut ſi quidem non impoſſibile dicet quadraturam ſuam ad exitum perducere, & per eam reapſe invenire rectilineum circulo æquale, oſtendam qui id facillimè impoſterum aſſequatur. Deinde veſtigia ipſius inſiſtens demonſtrabo, quibus hactenus nobis præceſſit, iis nequaquam ad optatum finem perveniri poſſe, ſed eſſe ſubſiſtendum ad concluſiones perquam abſurdas. Atque ut ad rem veniamus.



[Fig. 1].

Eſto circulus cujus centrum F, [Fig. 1] diameter CD. Et diviſo radio FC bifariam in G, ducantur ipſi ad angulos rectos FE, GH. Dico, datâ ratione ſegmenti CHG ad GHEF ſegmentum, dari quoque rationem circuli ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare [11]). Jungantur enim FH, HC, & manifeſtum eſt triangulum FHC fore æquilaterum; item quadrantis arcum CE triplum fore arcus HE. Si ergo data ſit ratio ſegmenti CHG ad GHEF ſegmentum, componendo quoque, data erit ratio quadrantis FEC ad ſegmentum GHEF. Sed data quoque eſt ratio ſectoris FHE ad quadrantem FEC, ergo datur quoque ratio ſegmenti GHEF ad ſectorem FHE; ac proinde dabitur quoque ratio ſegmenti GHEF ad triangulum FHG; quare & ratio ſectoris FHE ad triangulum FHG data erit. Sed huic rationi eadem eſt ratio ſectoris FHC ad triangulum FCH, (quoniam hæc utriuſque præcedentium dupla ſunt;) eademque eſt circuli ratio ad hexagonum regulare ſibi inſcriptum. Ergo & hanc datam eſſe apparet: quod erat demonſtrandum.

Sunto nunc lineæ AB, CD, EF [12]), ſingulæ æquales diametro circuli CD: & ſuper unaquaque harum conſtruantur bina quadrata. Deinde verticibus A & B deſcribantur ſemiparabolæ AVG, BTH, quarum baſes ſint quadratorum latera BG, AH. In duobus ſequentibus quadratis ducantur diagonii CI, DK. Sed in poſtremis rurſus ſemiparabolæ deſcribantur EΣL, FΠM, quarum vertices E & F, axes verò ſint quadratorum latera EΥ, FΩ, & baſes ΥL, ΩM. Porrò diviſis bifariam ſingulis lineis quæ ab initio poſitæ fuerunt, in N, O, P, & medietatibus rurſus bifariam

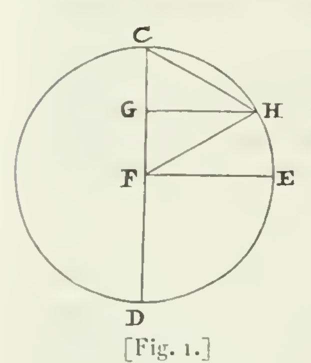
Huygens procède à montrer *a posteriori* que le résultat obtenu est inexact puisqu'il conduit à des conséquences absurdes.

[11]) Comparez les §§ 1 et 2 de l'„Aperçu" de la quadrature de Grégoire, p. 277 du Tome présent.

[12]) Voir les figures de la page 321. En les comparant avec la figure de la page 278, empruntée à l'ouvrage de Grégoire de St. Vincent, on s'apercevra que les deux carrés ont été intervertis par Huygens, ce qui d'ailleurs est sans conséquence.

de même aux points Q, R, S, soient tirées par les points de division les droites parallèles aux côtés des carrés TV, XY; ZΓ, ΔΘ; ΠΣ, ΛΞ.

Le très-savant Auteur fait donc voir dans la démonstration de la proposition 52 du livre 10 de l'Opus Geometricum [13]), et cela est très vrai, que dans le cercle précédent [Fig. 1] le segment CHG a avec le segment GHEF le même rapport qu'a ici le solide, qui est produit par les figures planes AYQ [Fig. 2] et AHXQ au solide produit par QYVN et QXTN, car de même que lui, dans sa figure, il fait égales les droites *hi*, *kl* [14]), ainsi nous, nous avons pris égales dans le cercle CG, GF et égales à celles-ci AQ, QN.



[Fig. 1.]

Et [15]) afin que la méthode même de démontrer soit également connue, voici comment elle procède. Dans la proposition 51 du livre 10 on fait voir [16]) que le solide produit par la demi-parabole ABG avec la demi-parabole ABH est egal au demi-cylindre, qui a pour base le demi-cercle CED [Fig. 1] et la hauteur CD. Ensuite dans le Corollaire de la même proposition il est exposé que la même chose convient aussi bien aux parties qu' aux solides entiers. C'est-à-dire le solide produit par les figures planes QYVN et QXTN est aussi égal à la partie du dit demi-cylindre qui a pour base le segment GHEF. De même le solide produit par AYQ et AHXQ est égal à la partie du même demi-cylindre qui repose sur le segment CHG [17]). Ce dont le dernier est clair aussi par ceci qu' autrement la somme de ces deux solides, savoir le solide produit par AVN avec AHTN ne ferait pas égal à la moitié du demi-cylindre indiqué et que par conséquent ferait faux ce qui est concédé, savoir que le solide produit par la demi-parabole ABG avec la demi-parabole ABH est égal à l'entier demi-cylindre. Il paraît donc, puisque les deux parties nommées du demi-cylindre ont le même

[13]) Comparez les §§ 3—5 de notre „Aperçu", p. 277—278 du Tome présent.

[14]) Lisez HI, KL et voyez la figure de l'„Aperçu" à la page 278.

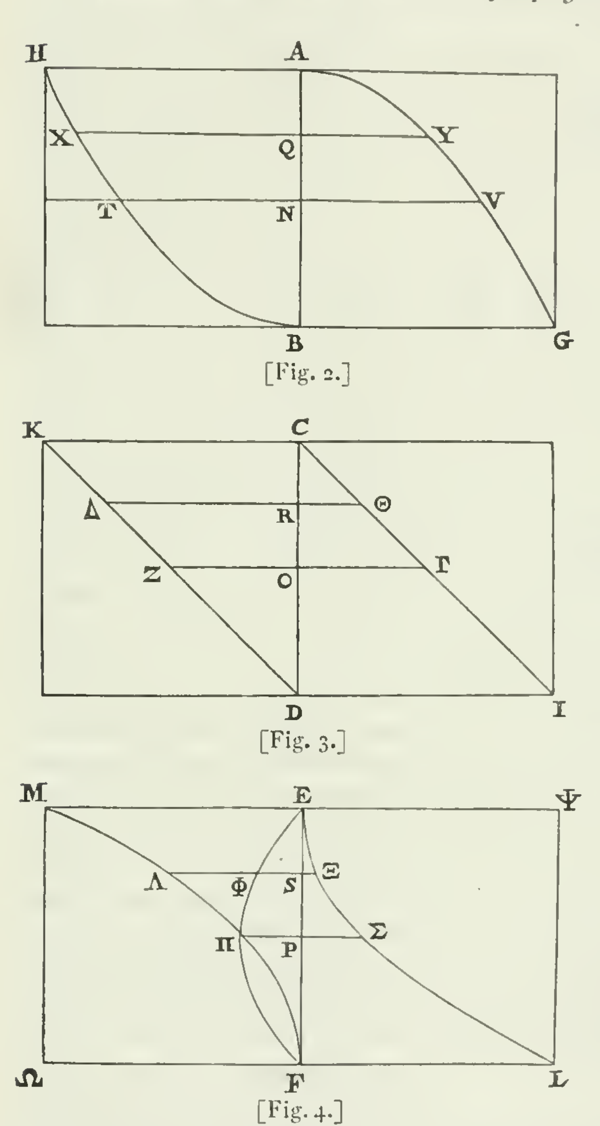
[15]) Les deux alinéas qui suivent ne se trouvaient pas dans la rédaction primitive de l'„Ἐξέτασις." Ils y ont été intercalés en conséquence d'une observation de van Schooten; comparez la lettre N°. 108 du 28 décembre 1651, p. 162 du T. I.

[16]) Comparez le § 5 de notre „Aperçu". p. 278.

[17]) Le raisonnement qui va suivre, et qui a été ajouté sur l'instigation de van Schooten, n'a d'autre but que de montrer qu' on ne peut pas admettre la „Prop. 51" et son „Corollarium" pour un solide tel que GP (voir la figure p. 278 de notre „Aperçu") et la nier pour le solide AO qu'on obtient en apliquant la même opération, décrite dans le § 4, aux figures AGH et AYOH.

in Q, R, S, ducantur per divisionum puncta, quadratorum lateribus parallelæ, TV, YX; ZΓ, ΔΘ, ΠΣ, ΛΞ.

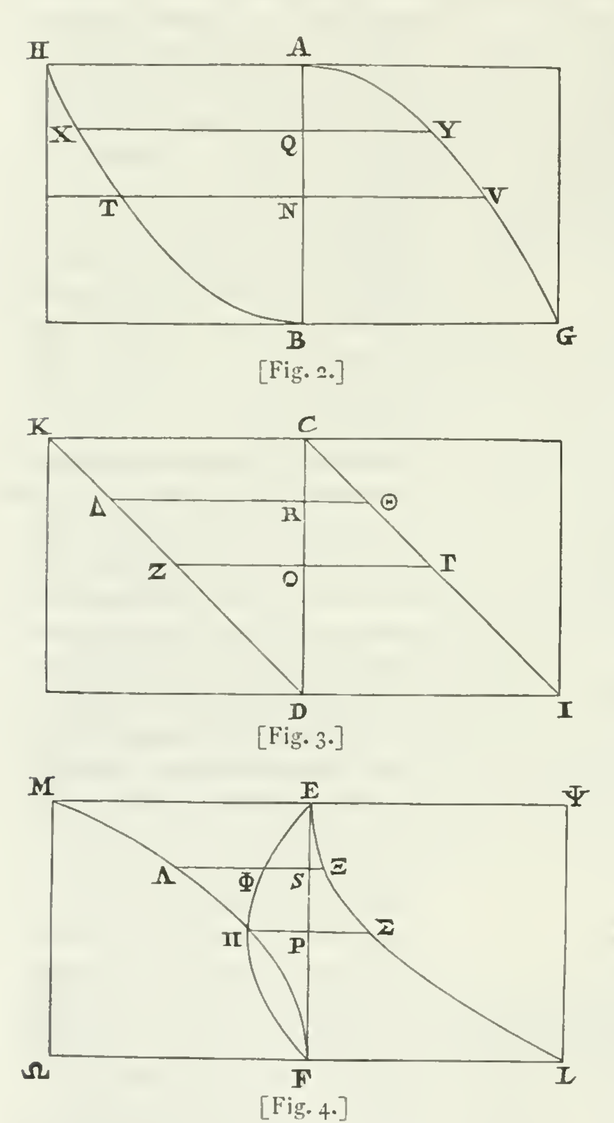
Ostendit itaque Cl. V. in demonstr. prop. 52. lib. 10. Oper. Geom. [13]) & verissimum est, in circulo superiori [Fig. 1] segmentum CHG ad segmentum GHEF, eandem habere rationem quam habet hìc solidum quod fit ex ductu plani AYQ [Fig. 2] in planum AHXQ, ad solidum ortum ex ductu plani QYVN in planum QXTN; sicut enim in planum ille in suo schemate sumit æquale lineas *hi*, *kl* [14]), ita nobis æquales sunt sumptæ in circulo, CG, GF, & hisce pares AQ, QN.



[Fig. 2.]
[Fig. 3.]
[Fig. 4.]

Atque [15]) ut ipsa demonstrandi methodus quoque noscatur, ea hujusmodi est. In prop. 51. lib. 10. ostenditur [16]) solidum quod fit ex ductu semiparabolæ ABG in semipar. ABH, æquari semicylindro, basin habenti semicirculum CED [Fig. 1] & altitudinem CD. Deinde in Corollario ejusdem prop. idem quoque singulis partibus quod totis solidis conuenire docetur. Nimirum id solidum quod fit ex ductu plani QYVN in planum QXTN, æquatur quoque parti dicti semicylindri quæ insistit segmento GHEF; Itemque solidum ex ductu plani AYQ in pl. AHXQ, æquatur ejusdem semicylindri parti quæ insistit segmento CHG [17]). Quorum hoc vel ex eò constat, quod alioqui duo ista solida simul sumpta, hoc est, solidum ex ductu plani AVN in pl. AHTN, æquale non esset dimidio ejus quem diximus, semicylindri; & consequenter falsum quoque esset quod in confesso est, nimirum solidum ex ductu semiparab. ABG in semiparab. ABH æquari toti semicylindro. Apparet igitur, quoniam dictæ semi-

rapport que celui des baſes ſur leſquelles elles repoſent, qu'il eſt certain ce que nous diſions, ſavoir que le ſegment de cercle CHG eſt à GHEF comme le ſolide produit par AYQ avec AHXQ au ſolide produit par QYVN avec QXTN.



[Fig. 2.]

[Fig. 3.]

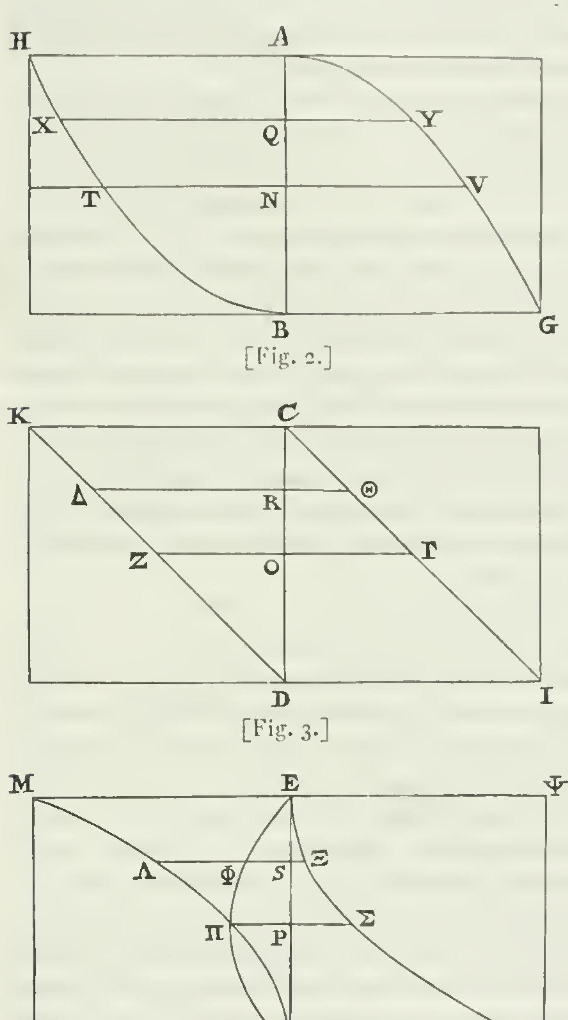
[Fig. 4.]

J'ai voulu écrire ceci ſi ſpécieuſement afin qu'à quelque lecteur, qui ignorerait peut-être la nature de la démonſtration qu' emploie le ſavant auteur, il ne puiſſe reſter de ſcrupule de ce que là où lui, dans la propoſition 52 du livre 10, conſidère deux ſegments de cercle, tels à peu près que GHEF, moi pour l'un d'eux j'ai pris le ſegment CHG: et de ce que dans la droite AB je prenne depuis l'origine A même deux parties égales AQ, QN. Ceci ne peut pas retenir le ſavant auteur lui-même, ni ici, ni dans ce qui ſuit puiſque, quand dans cette propoſition 52 et dans 44 du livre 10 [18]) il preſcrit de prendre dans la droite *ab* les deux *hi*, *kl* [19]) égales entre elles, il fait que cela n'admet aucune reſtriction; comme auſſi dans la figure correſpondante appartenant à la propoſition 39 du livre 10, partout dans la ligne *ab*, il prend *ik* diviſée en deux parties égales *im*, *mk*. La même choſe arrive dans la propoſition ſuivante 40. [20])

Je retourne maintenant à ce que je m' étais propoſé, et il eſt donc démontré à préſent que, lorſque eſt donné le rapport du ſolide produit par AYQ [Fig. 2] avec AHXQ, au ſolide produit par QYVN avec QXTN par cela même eſt donné auſſi le rapport du ſegment CHG au ſegment GHEF, et que par conſé-

[18]) Consultez sur les „Prop. 52 et 44" les §§ 3 et 7, pp. 277 et 279 de nôtre „Aperçu".

cylindri partes eandem inter ſe rationem habent quam baſes quibus inſiſtunt, certum eſſe quod diximus, ſegmentum circuli CHG ad GHEF, eſſe ut ſolidum ex ductu plani AYQ in pl. AHXQ ad ſolidum ex ductu plani QYVN in pl. QXTN.



[Fig. 2.]

[Fig. 3.]

[Fig. 4.]

Hæc ita enucleatè ſcribere volui, ne cui ignaro fortaſſe naturæ demonſtrationum quibus Cl. V. utitur, ſcrupulus reſtare poſſet, quod ubi ille in d. prop. 52, lib. 10, duo circuli ſegmenta conſiderat, quale ferè eſt GHEF, ego pro altero eorum ſumpſerim ſegmentum CHG: Quodque in linea AB ab ipſo termino A æquales partes capiam AQ, QN. Ipſum autem Cl. Virum hæc remorari non poſſunt, neque hìc, neque in ſequentibus; quia cùm in d. prop. 52. & 44. lib. 10. [18]) præcipit in linea *ab* æquales inter ſe ſumi *hi*, *kl* [19]), ſcit hoc nullam limitationem admittere; ſicut & in ſchemate communi prop. 39, lib. 10, ubivis in linea *ab* ſumitur *ik*, quæ dividitur in duas æquales *im*, *mk*. Idem contingit in prop. ſequenti 40 [20]).

Revertor autem ad propoſitum & conſtat nunc quidem, ſi detur Ratio ſolidi quod fit ex ductu plani AYQ [Fig. 2] in pl. AHXQ, ad ſolidum ex ductu plani QYVN in pl. QXTN, eo ipſo dari quoque rationem ſegmenti CHG [Fig. 1] ad ſegmentum GHEF, ac proinde continuò tunc

[19]) Lisez AB, HI et KL et consultez la figure de nôtre „Aperçu", p. 278.

[20]) Consultez sur ces propositions le § 10, p. 280 de l'„Aperçu". Dans la figure dont il est question un segment comme IK de la droite AB de la figure de l'„Aperçu" est partagé en deux parties égales par le point M.

quent on peut immédiatement trouver le rapport du cercle à ſon hexagone inſcrit.

Nommons, pour abréger, le ſolide que nous diſions être produit par AYQ avec AHXQ, le ſolide HY. Et de même celui produit par QYVN avec QXTN le ſolide XV. Et nommons de même ce qui eſt produit par CΘR avec CK∆R le ſolide KΘ, et appliquons la même locution aux ſolides ∆Γ, MΞ, ΛΣ, deſquels on comprend maintenant aſſez ce qu'ils doivent déſigner.

Cela poſé, il faut ſavoir que pour le ſavant auteur tout eſpoir et toute baſe de la Quadrature à effectuer ſont fondées en ceci qu'il eſtime facile de trouver le rapport du ſolide HY au ſolide XV (lequel rapport j'ai déjà dit être la ſeule choſe qui reſte à déſirer) dès que l'on connaît les deux rapports ſuivants ſavoir celui du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ, et celui du ſolide KΘ au ſolide ∆Γ.[21]) Car alors on pourra argumenter comme il ſuit. Connu eſt le rapport du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ, de même celui du ſolide KΘ au ſolide ∆Γ; donc eſt connu auſſi combien de fois le premier rapport contient le dernier, or, autant de fois que celui-là contient celui-ci, autant de fois ce dernier, c'eſt-à-dire le rapport du ſolide KΘ au ſolide ∆Γ contient le rapport du ſolide HY à XV, donc auſſi ce dernier rapport ſera connu. Comment on doit comprendre ces déductions paraîtra mieux plus loin, où nous répéterons la même argumentation. Entretemps je ſuis certain que rien de ce que j'ai dit ne ſera nié par le ſavant auteur; qu'il conſidère ſeulement que dans la droite AB on a pris les parties AQ, QN etc. égales entre elles, et à celles-ci les parties CR, RO, ES, SP.

Si donc je lui aurai indiqué quel eſt le rapport du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ, et auſſi quel eſt le rapport du ſolide KΘ au ſolide ∆Γ, et que même alors il ne puiſſe dire quel eſt le rapport du ſolide HY au ſolide XV, il devra avouer qu'il a tenté en vain la Quadrature tant du Cercle que de l'Hyperbole. Du Cercle, parce qu'il verra alors que la Propoſition 44 du livre 10 de l'Opus Geometricum[21]) n'aboutit nullement, laquelle ſera vaine et ſans valeur tant que, par les rapports connus du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ et du ſolide KΘ au ſolide ∆Γ, n'eſt pas connu le rapport du ſolide HY au ſolide XV. De l'Hyperbole, parce que la propoſition 146 [22]) du même livre 10, ſur laquelle repoſe cette quadrature, eſt la même que la propoſition citée 44, et ſe trouve appliquée à l'Hyperbole dans les mêmes termes.

Si, au contraire, lorſque ces deux rapports ſont donnés, il aurait pu trouver enſuite celui du ſolide HY au ſolide XV, alors il peut croire avoir réellement carré le Cercle. Car ainſi ſera connu le rapport du ſegment CHG [Fig. 1] dans le cercle au ſegment GHEF et ce qui reſte à faire eſt facilement accompli.

Je dirai maintenant quels ſont ces rapports. Quant au premier, ſavoir celui du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ, je dis qu'il eſt le même que celui des nombres 53 à 203, tandis que l'autre, le rapport du ſolide KΘ au ſolide ∆Γ eſt celui de 5 à 11 et de ces deux rapports je donnerai plus loin la démonſtration.

Mais d'abord je montrerai ce que j'ai promis au commencement, ſavoir que lorſque ces deux rapports ſont connus, on ne peut pourtant pas, au moins par ce

inveniri poſſe quam rationem circulus habeat ad inſcriptum hexagonum regulare.

Vocemus autem brevitatis gratia, id quod fieri diximus ex ductu plani AYQ in planum AHXQ, ſolidum HY. Item quod fit ex ductu plani QYVN in planum QXTN, ſolidum XV. Similiter quod oritur ex ductu plani CΘR [Fig. 3] in planum CKΔR, vocemus ſolidum KΘ; eâdemque brevitate dicamus ſolida ΔΓ, MΞ [Fig. 4], ΛΣ, quibus quæ denotentur jam ſatis intelligatur.

His ſic conſtitutis, ſciendum eſt, omnem ſpem & fundamentum perficiendæ Quadraturæ Cl. Viro in eo poſitum eſſe, quod exiſtimet rationem ſolidi HY ad ſolidum XV (quam unicam tantum deſiderari jam admonui) facilè inveniri poſſe, ſi cognitæ ſint duæ rationes hæ, nimirum ratio ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, & ratio ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ. [21]) Sic enim tunc argumentabitur; Nota eſt ratio ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, item ratio ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, ergo notum quoque quoties illa ratio hanc contineat; Quoties autem illa hanc continet toties hæc ipſa, ſcilicet ratio ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, continet rationem ſolidi HY ad XV; ergo & hæc ratio nota erit. Quomodo hæc intelligenda ſint paulò inferiùs melius patebit, ubi eandem argumentationem repetemus. Interea certò ſcio nihil horum quæ dixi mihi à Cl. V. negatum iri, modò conſideret in linea AB, ſumptas eſſe æquales inter ſe partes AQ, QN, & hiſce pares CR, RO; ES, SP.

Si igitur indicavero ipſi quæ ſit ratio ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, item quæ ſit ratio ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, & ne tum quidem dicere poſſit quam rationem habeat ſolidum HY ad ſol. XV, fateatur ſanè ſe fruſtra utramque Quadraturam tentaſſe, tam Circuli quam Hyperboles. Circuli; quoniam tunc videbit nequaquam procedere Propoſitionem 44. lib. 10. Oper. Geom. [21]) quæ vana & inanis erit, niſi ex notis rationibus ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, & ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, innoteſcat ratio ſolidi HY ad ſol. XV. Hyperboles verò; quoniam prop. 146 [22]) ejuſd. lib. 10. cui hæc quadratura innititur, eadem eſt cum dicta prop. 44 & iiſdem verbis Hyperbolæ applicatur.

Sin verò datis iſtis duabus rationibus invenire poſthac potuerit rationem ſolidi HY ad ſol. XV, tum ſe credat Circulum reverâ quadraviſſe. Nota enim ſic erit ratio ſegmenti CHG [Fig. 1] in circulo ad ſegmentum GHEF, & reliqua facile perficientur.

Dicam autem nunc ipſas Rationes. Et primam quidem, hoc eſt rationem ſolidi MΞ ad ſol. ΛΣ, aio eſſe eandem quæ numeri 53 ad 203. Alteram verò, rationem ſolidi KΘ ad ſol. ΔΓ, eam quæ 5 ad 11. atque horum utrumque infrà ſum demonſtraturus.

Priùs autem quod ab initio promiſi etiam oſtendam, hiſce Rationibus cognitis, tamen rationem ſol. HY ad ſol. XV, per ea quidem quæ nos adhuc

[21]) Comparez le § 7 de l'„Aperçu". p. 279.

[22]) Voir la page 1222 de l'ouvrage de Gregoire.

que le ſavant auteur nous a enſeigné jusqu'ici, trouver le rapport du ſolide HY au ſolide XV. En effet, s'il veut trouver, au moyen des rapports donnés du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ et du ſolide KΘ au ſolide ΔΓ, le troiſième rapport du ſolide HY au ſolide XV, il raiſonnera de la manière ſuivante, comme on peut le voir par la démonſtration de la propoſition 44 citée ci-deſſus, avec laquelle manifestement ce cas eſt identique. Il dira donc, connus ſont le premier et le ſecond rapport (car ils ſont de 53 à 203, et de 5 à 11) donc eſt connu auſſi combien de fois le premier rapport contient le ſecond. Mais autant de fois que le premier contient le ſecond, autant de fois le ſecond contient le troiſième (c'eſt ce qu'il prétend dans la propoſition 40 du livre 10 de l'Opus Geometricum. [23]) Donc eſt connu auſſi combien de fois le ſecond contient le troiſième, et comme le ſecond eſt connu, le troiſième le ſera également, c'eſt-à-dire celui du ſolide HY au ſolide XV.

Par conſéquent, il lui incombera maintenant de définir combien de fois le premier rapport contient le ſecond, c'eſt-à-dire combien de foit le rapport de 53 à 203 contient le rapport 5 à 11. Mais d'abord comment va-t-il expliquer ici le terme *contenir?* De telle manière qu'il ſignifie la même choſe qu' ailleurs *contenir par multiplication?* [24]) et que le rapport 53 à 203 ſoit dit de multiplier le rapport 5 à 11 ſoit deux fois (c'eſt-à-dire que le premier eſt le carré du dernier, car ainſi il ſemble comprendre le terme *continere* dans la propoſition 40, tantôt citée, du livre 10) ou trois fois, ou quatre fois ou même plus. Mais ceci ne peut pas avoir lieu parce que le rapport 53 à 203 n'eſt du rapport 5 à 11 ni le carré, ni la troiſième puiſſance ou quelque puiſſance plus élevée, vu que ce n'eſt que 53 à $256\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ qui ſoit le carré du rapport 5 à 11.

Va-t-il donc appliquer au terme *Continere* le même ſens qu'il a dans la propoſition 125 du livre 8 de l'Opus Geometricum? [25]) Je puis à peine le soupçonner, mais même s'il le voulût, il en réſultera également une abſurdité. Car ſelon cette interprétation autant de fois que le rapport 53 à 203 contient le rapport 5 à 11, autant de fois cette dernière même contiendra le rapport 5075 à 6413 [26]) car ceci paraîtra lorſqu'on examine entre eux ces rapports d'après la règle de la dite propoſition 125. Le rapport du ſolide HY [Fig. 2] au ſolide XV, ou ce qui eſt la même choſe, le rapport du ſegment de cercle CHG [Fig. 1], propoſé d'abord, au ſegment GHEF ſerait donc de même de 5075 à 6413. Par conſéquent des parties, telles que le ſegment CHG en contient 5075, le ſegment GHEF en contiendrait 6413, et par conſéquent le quadrant FCE 11488; et le ſecteur FHE (qui eſt le tiers du quadrant) $3829\frac{1}{3}$; et le triangle GHF $2583\frac{2}{3}$. Mais, comme le ſecteur FHE eſt au triangle

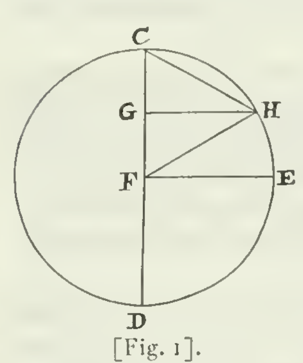
[23]) Voir le § 10, p. 280 de l'„Aperçu".

[24]) Comparez le passage cité dans la note 8, p. 317 et consultez sur l'expression; „continere per multiplicationem" le § 9, p. 279 de l'„Aperçu" avec la note 28.

[25]) Voici cette proposition (p. 930 de l'ouvrage de Grégoire): „Oporteat datam rationem per aliam partiri sive ostendere quoties una alteram contineat", suivie par la „Constructio": „Sit AB

docuit V. Cl. inveniri non poſſe. Etenim inventurus ex datis rationibus, ſol. MΞ ad ſol. ΛΣ, & ſolidi KΘ ad ſol ΔΓ, rationem tertiam ſolidi HY ad ſol. XV, in hunc modum ratiocinabitur, ut videre eſt ex demonſtratione prop. 44. ſuprà citatæ, cui hunc caſum convenire liquido conſtat. Dicet enim, Notæ ſunt prima & ſecunda ratio, (iſtæ enim ſunt 53 ad 203, & 5 ad 11,) ergo notum quoque quoties prima ſecundam contineat. Sed quoties prima continet ſecundam, toties ſecunda continet tertiam, (hoc aſſerit prop. 40. lib. 10. oper. Geom.) [23]) Ergo notum quoque quoties ſecunda tertiam contineat. Quare cum nota ſit ſecunda, etiam tertia nota erit, ea nimirum quam habet ſolidum HY ad ſol. XV.

Conſequenter hoc nunc definiendum ei incumbet, Quoties Ratio harum prima ſecundam contineat; hoc eſt, quoties ratio 53 ad 203, contineat rationem 5 ad 11. Sed enim quo ſenſu verba *continere* hìc explicaturus eſt? Num eo, ut idem ſignificet quod alibi *continere per multiplicationem?* [24]) utque ratio 53 ad 203 rationem 5 ad 11. multiplicare dicatur vel bis (hoc eſt ut illa hujus ſit duplicata, ita enim *continere* intelligendum videtur in propoſitione 40. lib. 10, modo citata) vel ter, vel quater, ſæpiùs etiam. Et hoc quidem eſſe non poteſt, nam ratio 53 ad 203, rationis 5 ad 11, neque duplicata eſt neque triplicata vel ulteriùs multiplex, quum demum ratio 53 ad 256 $\frac{1}{2}\frac{3}{5}$ ſit duplicata rationis 5 ad 11.



[Fig. 1].

An igitur verbum *Continere* in eum ſenſum trahet, quem habet in propoſitione 125. lib. 8. Oper. Geom? [25]) Vix quidem illud ſuſpicari poſſum; ſed etiamſi vellet rurſus inde abſurdum conſequetur. Nam ſecundum interpretationem iſtam; quoties ratio 53 ad 203 continet rationem 5 ad 11, toties hæc ipſa continebit rationem 5075 ad 6413 [26]); hoc autem patebit horum numerorum inter ſe rationes examinanti ſecundùm regulam dictæ propoſitionis 125. Eſſet igitur ratio ſolidi HY [Fig. 2] ad ſol. XV, hoc eſt, ratio ſegmenti circuli ab initio propoſiti CHG [Fig. 1], ad ſegmentum GHEF, eadem quæ 5075 ad 6413. Quare qualium partium ſegmentum CHG eſſet 5075, talium ſegmentum GHEF eſſet 6413; & proinde quadrans FCE 11488; & ſector FHE (qui quadrantis tertia pars eſt) $3829\frac{1}{3}$: & triangulum GHF $2583\frac{2}{3}$. Sicut autem ſector FHE ad triang. GHF, ita eſt ſector

---

ratio" $\left[\text{c'est-à dire}\,\frac{A}{B}\right]$ „diuidenda per CD rationem: fiat vt D ad C ita B ad E. Dico rationem AB diuisam esse per rationem CD. nam toties AB, continet CD rationem. quoties A continet E." Alors, en effet. $E = \frac{BC}{D}$ et conséquemment $\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = A : E$.

[26]) Puisqu' on a en effet : $\frac{53}{203} : \frac{5}{11} = \frac{5}{11} : \frac{5075}{6413}$.

GHF ainſi eſt le ſecteur FHC au triangle FCH et ainſi le cercle CD à ſon hexagone régulier inſcrit. Donc auſſi des parties telles que le cercle en contient $3829\frac{1}{3}$ l'hexagone inſcrit en contiendrait $2583\frac{2}{3}$. Mais des parties telles que l'hexagone inſcrit en contient $2583\frac{2}{3}$ l'hexagone regulier circonſcrit en contient $3444\frac{8}{9}$, parce que ce dernier eſt $\frac{4}{3}$ du premier. Par conſéquent des parties telles que le cercle en contient $3829\frac{1}{3}$, l'hexagone circonſcrit en contiendrait $3444\frac{8}{9}$, de ſorte que celui-ci ſerait moindre que le cercle ce qui eſt abſurde.

Nous avons donc rendu manifeſte que des deux interprétations du mot *Continere* aucune ne peut convenir à notre cas. Mais en dehors de celles-là il n' en a donné aucune autre dans ſon ouvrage; il n'a donc pas enſeigné la manière de déterminer combien de fois le rapport du ſolide MΞ au ſolide ΛΣ contienne le rapport du ſolide KΘ [27]) au ſolide ΔΓ et par conſéquent ne pourrait pas non plus déterminer combien de fois ce rapport contient le rapport du ſolide HY au ſolide XV. D'où il paraît que ce rapport, même alors que les deux premiers ſont donnés, ne peut être connu au moyen de ce que le très-ſavant auteur a trouvé, et que par conſéquent il a eſpéré en vain de pouvoir effectuer de cette manière la quadrature du cercle.

Il ne me reſte maintenant que de rendre manifeſte ce que j'ai poſé dans ce qui précède, en diſant que je démontrerais que le ſolide MΞ [Fig. 4] eſt au ſolide ΔΣ comme 53 à 203, et de même que le ſolide KΘ [Fig. 3] aurait au ſolide ΔΓ le même rapport que 5 à 11.

Mais comme pour démontrer le premier il eſt néceſſaire que nous ſachions quelle eſt le Rapport de l'onglet Parabolique à ſon Cylindre de même baſe et de même hauteur; à cet effet faiſant connaître ce rapport, nous allons augmenter le Traité que le très-ſavant Auteur donne ſur cet Onglet, dans la Partie 5 du livre 9, [28]) d'un Théorème excellent, lequel je m'étonne que l'Auteur n'a pas trouvé lui-même parce qu'il ſe déduit facilement des choſes qu'il avait déjà démontrées, ainſi qu'il paraîtra bientôt.

Répétant donc pour autant qu'il ſera néceſſaire ici ſa figure de la propoſition 99 [29]) du livre 9, ſoit un Cylindre Parabolique ayant pour baſes opposées les paraboles ABD, VCE, duquel ſoit découpé l'Onglet ABCD ayant la même baſe et la même hauteur. Je dis que le rapport du Cylindre à l'Onglet eſt de $2\frac{1}{2}$ ou comme 5 à 2.

Après avoir copié de la même figure ce qui reſte, FB eſt le diamètre de la parabole ABD et AB, BD ſont des droites. Ayant tirée enſuite ſur la ſurface du cylindre la droite BC et ayant priſe ſa quatrième partie CQ, le plan PQN découpe l'onglet PQCN et on joindra encore CA, CD. Enfin au cylindre entier eſt ajoutée encore

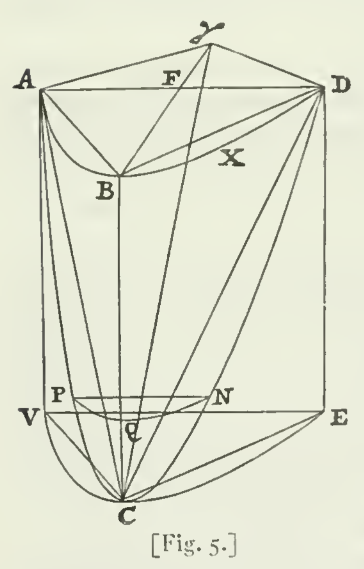
[27]) Voir les „Errata" vers la fin de l' „Ἐξέτασις" (p. 337 du Tome présent) avec la note 41.
[28]) Aux pages 1020—1037 de l'ouvrage de Grégoire sous la surscription: „Vngulam paraboli-

FHC ad triangul. FCH, & ita circulus CD ad inſcriptum ſibi hexagonum regulare. Ergo quoque qualium partium circulus CD eſſet $3829\frac{1}{3}$ talium hexagonum inſcriptum foret $2583\frac{2}{3}$. Qualium autem hexagonum inſcriptum eſt $2583\frac{2}{3}$, talium hexagonum regulare circumſcriptum eſt $3444\frac{8}{9}$; quoniam hoc inſcripti eſt ſeſquitertium: Ergo qualium partium circulus CD eſſet $3829\frac{1}{3}$, talium hexagonum circumſcriptum eſſet $3444\frac{8}{9}$, atque ita eſſet ipſo circulo minus, quod eſt abſurdum.

Manifeſtum igitur fecimus, ex duabus interpretationibus verbi *Continere*, neutram caſui noſtro accommodari poſſe. Aliam autem præter illas nullam in ſuo opere attulit; non docuit igitur modum determinandi, quoties [ratio ſol. MΞ ad ſol. ΛΣ contineat rationem ſol.][27]) KΘ ad ſolid. ΔΓ, ac proinde nec determinari poterit quoties hæc ratio contineat rationem ſolidi HY ad ſolid. XV. Quare liquet, hanc rationem, ne duabus quidem prioribus iſtis datis, per inventa Clariſſ. Viri cognoſci poſſe: ideoque fruſtra ipſum ſperaſſe hoc modo perficere Circuli quadraturam.

Reſtat nunc tantùm ut manifeſta faciam quæ in præcedentibus poſita fuere, dixi enim me demonſtraturum, quòd ſolidum MΞ [Fig. 4] eſſet ad ſolid. ΔΣ, ut 53 ad 203: item quòd ſolidum KΘ [Fig. 3] rationem haberet ad ſolidum ΔΓ, quam 5 ad 11.

Quoniam autem ad horum primi demonſtrationem neceſſarium eſt, ut notum habeamus, quæ ſit Ratio ungulæ Parabolicæ ad Cylindrum ſuum, qui baſi inſiſtit eidem, & eandem habet altitudinem; idcircò hanc Rationem declarantes, Tractatum Clariſſ. Viri, quem de eadem Ungula, Parte 5. lib. 9.[28]) propoſuit, uno egregrio Theoremate auctiorem reddemus, quod miror ipſum non inveniſſe, quum ex iis quæ jam oſtenderat facili negotio deducatur, ut jam ſtatim apparebit.



[Fig. 5.]

Repetitâ enim quatenus hìc neceſſe erit figurâ ipſius, quæ eſt in propoſitione 99.[29]) lib. 9. Eſto Cylindrus Parabolicus, baſes oppoſitas habens parabolas ABD, VCE; à quo ſit abſciſſa Ungula ABCD, eâdem baſi & altitudine. Dico Cylindrum ad hanc Ungulam habere rationem duplam ſeſquialteram, ſive quam 5 ad 2.

Tranſcriptis enim reliquis ex figura eâdem, eſt FB diameter parabolæ ABD: & lineæ rectæ AB, BD. Ducta porro BC recta in ſuperficie cylindri, ſumptâque ejus quartâ parte CQ, abſcinditur plano PQN ungula PQCN & junguntur CA, CD.

cam considerat; insuper cylindricam ungulam & sphaeram confert cum parabola & cylindro parabolico."

[29]) La figure en question se trouve à la page 1032 de l'ouvrage de Grégoire dans la propoſition 97; mais elle sert aussi pour la „Prop. 99." (p. 1033).

la pyramide ADγC égale à la partie BXDEC, découpée du cylindre par le plan BDEC. Et jufqu' ici il nous fuffira d'avoir répété la conftruction du très-favant auteur. Or, il a démontré ces deux propriétés fuivantes, comme on peut le voir dans la dite propofition 99 du livre 9, favoir que l'onglet ABCD eft à l'onglet PQCN comme 32 à 1,[30]) et de même que cet onglet PQCN eft à la pyramide entière AγDBC laquelle eft compofée des deux pyramides ADBC et ADγC, comme 1 à 30.[31])

Donc, par la règle de la proportion dérangée, l'onglet ABCD eft à la pyramide comme 32 à 30 ou comme 16 à 15. De plus, comme le fegment BDX eft la huitième partie[32]) de la parabole ABD, le fegment folide BXDEC ou la pyramide ADγC qui lui eft égale, fera la huitième partie du cylindre parabolique entier AVCEDB; mais l'autre pyramide ADBC eft égale à deux huitièmes ou au quart du même cylindre parabolique, (car elle eft le tiers de fon prifme lequel eft égal aux trois quarts de ce cylindre comme il paraît par la quadrature de la parabole); donc la pyramide entière AγDBC eft égale aux trois huitièmes du cylindre parabolique AVCEDB.

Le cylindre parabolique AVCEDB fera donc à la pyramide AγDBC comme 8 à 3, c'eft-à-dire comme 40 à 15; mais on a montré que la même pyramide AγDBC eft à l'onglet ABCD comme 15 à 16. Donc, par la règle citée, le cylindre parabolique AVCEDB eft à l'onglet ABCD comme 40 à 16, c'eft-à-dire comme 5 à 2, ce qu'il fallait démontrer.

Les propriétés que j'ai dit ici avoir été démontrées par le très-favant auteur font très vraies et par conféquent il n'y a pas de quoi faire douter de la verité de ce Théorème, dont je pourrais apporter encore une autre démonftration tout à fait différente,[33]) fi je n'avais hâte d'arriver à ce qui fuit.

---

30) Voici à peu près comment ce rapport a été obtenu par Grégoire dans ses „Prop. 95 et 86" (pp. 1030 et 1023). Divisons les cordes AD et PN dans un nombre égal et assez grand de segments égaux et soient $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ deux segments correspondants. Coupons alors l'onglet ABDC par des plans parallèles au plan BγC et passant par les points α et β, et de même l'onglet PQNC par des plans parallèles au même plan et passant par α' et par β'. Comparons ensuite les tranches triangulaires correspondantes des deux onglets. Il est clair que leurs épaisseurs $\alpha'\beta'$ et $\alpha\beta$ sont dans le rapport de PN à AD, c'est-à-dire puisque APCND est une parabole de 2 à 1; mais leurs bases triangulaires, qui sont sembables, sont dans le rapport CB^2 à CQ^2, c'est-à-dire de 16 à 1. Donc les parties correspondantes des onglets et par conséquent les onglets eux mêmes se rapportent comme 32 : 1.

31) La démonstration de Grégoire, donnée dans la Prop. 99 (p. 1033), laquelle dépend de plusieurs propositions précédentes, est très compliquée et il est à supposer que Huygens s'est plûtot fié à sa propre démonstration du théorème énoncé plus haut, démonstration dont il parle plus loin, mais que nous ne connaissons pas.

Mais il est facile de vérifier l'exactitude du rapport en question. En effet, si A représente l'aire du segment parabolique ABD, h la hauteur BC du cylindre, et x la distance du point C à une section plane parallèle au segment, alors le volume de l'onglet ADBC est exprimé

Denique toti cylindro adjuncta eſt pyramis $AD\gamma C$ æqualis parti BXDEC, quæ à cylindro abſciſſa eſt plano BDEC. Et hactenùs quidem ſufficiet nobis conſtructionem Cl. V. repetiiſſe. Demonſtravit autem hæc duo quæ ſequuntur, ſicut videre eſt in dicta prop. 99. lib. 9. Nimirum quod ungula ABCD eſt ad ungulam PQCN, ſicut 32 ad 1 [30]). Item quòd hæc ungula PQCN eſt ad pyramidem totam $A\gamma DBC$, (quæ compoſita eſt ex duabus pyramidibus ADBC & $AD\gamma C$) ut 1 ad 30 [31]).



[Fig. 5.]

Erit igitur ex æquo ungula ABCD ad pyramidem $A\gamma DBC$ ut 32 ad 30, hoc eſt, ut 16 ad 15. Porrò cum parabolæ ABD octava pars ſit ſegmentum BDX [32]), erit quoque ſegmentum ſolidum BXDEC vel huic æqualis pyramis $AD\gamma C$, octava pars cylindri totius parabolici AVCEDB: ſed pyramis altera ADBC æquatur duabus octavis ſive uni quartæ ejuſdem parabolici cylindri; (eſt enim ipſa tertia pars ſui priſmatis quod æquale eſt tribus quartis cylindri iſtius, ut ex quadratura parabolæ conſtat) ergo tota pyramis $A\gamma DBC$ tribus octavis æquatur cylindri parab. AVCEDB. Cylindrus igitur parabolicus AVCEDB erit ad pyramidem $A\gamma DBC$, ut 8 ad 3, hoc eſt, ut 40 ad 15; ſed oſtenſum eſt eandem pyramidem $A\gamma DBC$ eſſe ad ungulam ABCD ut 15 ad 16. Igitur ex æquo erit cylindrus parabolicus AVCEDB ad ungulam ABCD ut 40 ad 16, hoc eſt, ut 5 ad 2; quod fuit demonſtrandum.

Quæ hìc dixi à Cl. Viro oſtenſa fuiſſe, veriſſima ſunt, ac proinde non eſt quòd de veritate hujus Theorematis dubitemus: Cujus aliam quoque demonſtr. [33]) adferre poſſem, longè ab iſta diverſam, niſi ad ſequentia properarem.

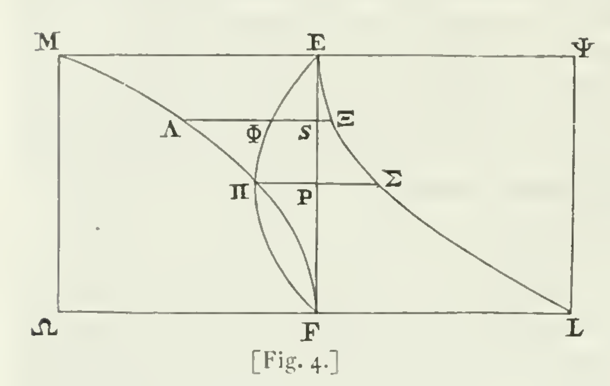
---

par l'intégrale $\int_0^h A\left(\frac{x}{h}\right)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{5}\, Ah$; donc celui de l'onglet PQNC par $\frac{1}{32} \times \frac{2}{5} Ah = \frac{1}{80}$ Ah. De plus, la pyramide ADBC égale $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} Ah = \frac{1}{4}\, Ah$ et la pyramide $AD\gamma C$: $\frac{1}{8}\, Ah$, puisqu' elle est égale par construction au cylindre BXDCE dont la base BXD $= \frac{1}{8}$ A (voir la note suivante). La somme des deux pyramides ADBC et $AD\gamma C$ est donc $\frac{3}{8} Ah = 30 \times \frac{1}{80}$ $Ah = 30$ fois l'onglet PQCN.

32) Le triangle ABD est égal au $\frac{3}{4}$ du segment parabolique ABD; il reste donc pour le segment BXD la moité du quart de ce segment.

33) Nous n'en avons rien trouvé dans les manuscrits.

Reprenant donc la dernière partie de la figure que j'ai décrite plus haut [34]), propoſons nous de démontrer que le ſolide ΜΞ [Fig. 4], c'eſt-à-dire celui produit par ΕΞS avec ΕΜΛS eſt au ſolide ΛΣ, produit par SΞΣP avec SΛΠP, comme 53 à 203. Soit décrite ſur EF la parabole EΠF ayant l'axe PΠ, qu'on fait être le quart de EF ou de ME. Cette parabole EΠF ſera donc la même que celle que le très ſavant auteur dans les propoſitions 41 [35]) et 42 du livre 10 déſigne par les lettres ARB. Car il dit dans la dite propoſition 42, et cela eſt très vrai, que le ſolide produit par EΣLF avec FΠME égale le ſolide produit par la parabole EΠF avec ſoi-même, comme auſſi ce qu'il ajoute dans le Corollaire 1, ſavoir que le ſolide produit par SΞΣP avec SΛΠP égale le ſolide produit par SΦΠP avec ſoi-même, [36]) d'où pareillement le ſolide produit par ΕΞS avec ΕΜΛS égale le ſolide produit par EΦS avec ſoi-même.



[Fig. 4.]

Il faut donc montrer que le ſolide produit par EΦS eſt au ſolide produit par SΦΠP, l'une et l'autre avec elles-mêmes, comme 53 à 203.

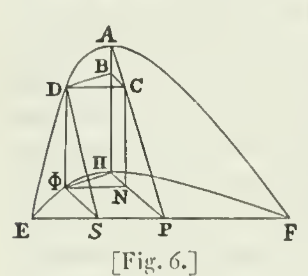
Soit l'onglet AEFΠ [Fig. 6], dont la baſe parabolique EΠF ſoit priſe de la figure précédente [Fig. 4] et diviſée de la même manière par les droites ΠP, ΦS. Mais ſoit la hauteur de l'onglet AΠ le double du diamètre ΠP de la baſe. Ce ſera donc le même onglet qu'il conſidère, dans la dite propoſition 42 du livre 10 et dans ſon corollaire 2, comme produit par la parabole EΠF avec ſoi-même. En effet, il a appliqué la même conſidération que celle du Scholium de la propoſition 19 du livre 9. [37]) Car autrement d'un tel produit il faudrait dire plutôt que ſe produiſent deux onglets ayant chacun la hauteur égale au diamètre ΠP. Si maintenant on mène un plan par AΠP et un autre DΦS parallèle à ce dernier et paſſant par la droite ΦS, alors la partie de l'onglet compris entre ces deux plans ſera égale au ſolide produit par SΦΠP avec ſoi-même et la partie EDSΦ de l'onglet égale au ſolide produit par EΦS avec ſoi-même. Par conſéquent il faut maintenant ſeulement démontrer que la partie EDSΦ eſt à la partie ΦAP comme 53 à 203. Soit ΦN parallèle à EP et NC parallèle à ΠA. Donc, puiſque d'après la propriété de la Parabole PN eſt $\frac{3}{4}$ ΠP, PC ſera auſſi égal à $\frac{3}{4}$ AP. Mais SD eſt auſſi égale à $\frac{3}{4}$ AP, parceque elle lui eſt parallèle *) et que EAF eſt une para-

*) 11. 16. *Elém.* [38])

[34]) Voir les pages 322 et 323 du Tome préſent.

[35]) Décrivons dans la figure 4 du texte un demi-cercle ayant FE pour diamètre, et ſoit Λ le point où une ligne quelconque ΛΞ parallèle à MΨ coupe ce cercle. Alors la „Prop. 41" (p. 1124) nous apprend que le point Φ décrira une parabole si l'on a $S\Phi = S\Lambda^2 : ME$.

Repetitâ igitur parte ultimâ ſchematis, quod ſuprà deſcripſimus[34]), ſit oſtendendum, quòd ſolidum MΞ [Fig. 4], id eſt, quod oritur ex ductu plani EΞS in planum EMΛS ad ſolidum ΛΣ, id eſt, quod oritur ex ductu plani SΞΣP in planum SΛΠP, eam habet rationem quam 53 ad 203. Deſcribatur ſuper EF parabola EΠF, axem habens PΠ, quam conſtat eſſe quartam partem ipſius EF ſive ME. Erit igitur parabola EΠF eadem quam V. Cl. in prop. 41.[35]) & 42. lib. 10. notat literis ARB. Ait autem in dicta prop. 42. & veriſſimum eſt, ſolidum quod producitur ex ductu plani EΣLF in planum FΠME æquari ſolido quod fit ex parabola EΠF ducta in ſe ipſam: ſicut illud quoque quod ſubjungit in Coroll. 1 nimirum quod ſolidum ex plano SΞΣP in planum SΛΠP, æquatur ſolido ex ductu plani SΦΠP in ſe ipſum[36]); unde ſimiliter ſolidum ex plano EΞS in planum EMΛS æquabitur ſolido ex plano EΦS in ſe ipſum ducto.



[Fig. 6.]

Oportet itaque oſtendere ſolidum ortum ex plano EΦS ad ſolidum ex plano SΦΠP, utroque in ſe ipſum ducto, eſſe ut 53 ad 203.

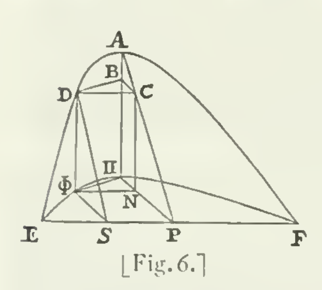
Eſto ungula parabolica AEFΠ [Fig. 6], cujus baſis parabola EΠF repetita ſit ex figura præcedenti [Fig. 4], eodemque modo ut illic diviſa lineis ΠP, ΦS. Sit autem altitudo ungulæ AΠ dupla diametri baſis ΠP. Erit igitur hæc ea ungula, quam intelligit in prop. dicta 42. lib. 10. ejusdemque coroll. 2. fieri ex ductu parabolæ EΠF in ſe ipſam. Eâdem nimirum conſideratione uſus quæ eſt in Scholio propoſ. 19. lib. 9.[37]) Nam alioqui ex ejuſmodi ductu potius dicendum eſſet geminas ungulas produci, ſingulas altitudine æquales diametro ΠP. Ducto deinde plano per AΠP, & alio huic parallelo DΦS ſecundum lineam ΦS, erit jam pars ungulæ hiſce duobus planis terminata, æqualis ſolido quod fit ex ductu plani SΦΠP in ſe ipſum; & pars ungulæ EDSΦ, æqualis ei ſolido quod fit ex ductu plani EΦS in ſe ipſum. Quare nunc demonſtrandum erit duntaxat, partem EDSΦ eſſe ad partem ΦAP ut 53 ad 203. Sit ΦN parallela EP, & NC parallela ΠA. Ergo quoniam ex proprietate Paraboles, PN eſt $\frac{3}{4}$ ΠP, erit quoque PC $\frac{3}{4}$ AP. Verùm & SD æquatur $\frac{3}{4}$ AP, quum ſit huic parallela *), ſitque parabola *) 11. 16. *Elem.*[38])

[36]) En effet, posant $PS = x$, $PE = r$, on a d'après la note précédente: $S\Phi = (r^2 - x^2) : 2r$; mais on a de même $S\Xi = (r - x)^2 : 2r$ et $\Lambda S = (r + x)^2 : 2r$; donc $S\Phi^2 = S\Xi \times \Lambda S$; d'où il suit que les solides en question possèdent des sections égales si on les coupe par des plans perpendiculaires à EF.

[37]) C'est-à-dire en remplaçant partout le carré décrit sur ΦS par le triangle rectangle dont la hauteur ΦD est le double de celle du carré. On trouve le Scholium en question aux pages 969—971 de l'ouvrage de Grégoire de St. Vincent au „Liber nonus De Cylindro Cono. Sphaera, Sphaeroide & utroque Conoide Parabolico & Hyperbolico.

[38]) „Si duo plana parallela plano quopiam secentur: communes illarum sectiones sunt parallelae (Clavius, p. 400).

bole. Donc si l'on joint CD, cette droite sera parallèle et égale à PS et NΦ. Menons suivant DC le plan DBC parallèle à la base EΠF, la demi-parabole BDC sera égale et semblable à la demi-parabole ΠΦN, et ΦBN sera un demi-cylindre parabolique, mais DACB la moitié d'un onglet. Mais celui-ci est égal, comme nous l'avons demontré précédemment, aux deux cinquièmes du demi-cylindre ayant DBC pour base et la hauteur BA. Donc, puisque le demi-cylindre ΦBN a une hauteur triple de BA, le demi-onglet DACB sera au demi-cylindre ΦBN comme 2 à 15, c'est-à-dire comme 8 à 60.



[Fig. 6.]

Après avoir ensuite tiré la droite ΦΠ, on sait que la demi-parabole ΠΦN est au triangle ΠΦN comme 4 à 3; mais le triangle ΠΦN est au rectangle ΦP comme 1 à 6 (car la base ΠN est le tiers de NP) c'est-à-dire comme 3 à 18. On aura donc, par la règle de la proportion dérangée, que la demi-parabole ΠΦN est au rectangle ΦP comme 4 à 18. Donc aussi le demi-cylindre ΦBN est au parallélipipède de la même hauteur sur la base ΦP comme 4 à 18. Mais la moitié de ce parallélipipède est le prisme DNS; donc le demi-cylindre ΦBN est au prisme DNS comme 4 à 9 c'est-à-dire comme 60 à 135. Donc des parties, desquelles le demi-onglet DCAB en contenait 8 le demi-cylindre parabolique ΦBN en contenait 60 (comme il a été montré ci-dessus) et le prisme DNS en contiendra 135. Et par suite le solide AΠSD, qui est composé de ces trois, en aura 203. Mais le demi-onglet ADCB est au demi-onglet EAPΠ comme 1 à 32, ainsi que le très-savant auteur l'a démontré dans la proposition 95 du livre 9. [39]) Donc des parties dont le demi-onglet ADBC en contient 8, le demi-onglet EAPΠ en contiendra 256, puisque comme 1 est à 32, ainsi 8 à 256. Mais nous avons dit que la partie AΠSD en contient 203. Donc le demi-onglet EAPΠ est à la partie AΠSD comme 256 à 203 et par division la partie restante EDSΦ à la partie AΠSD comme 53 à 203, ce qu'il fallait démontrer. Nous avons donc montré qu' aussi le solide que nous avons dit plus haut produit par EΞS [Fig. 4] avec EMΛS a le même rapport au solide produit par SΞΣP avec SΛΠP que 53 à 203. [40])

Abordons enfin l'autre théorème que nous avons promis de démontrer et, reproduisant la deuxième des trois figures décrites plus haut [Fig. 3], proposons nous de prouver que le solide produit par CΘR avec CK∆R est au solide produit par RΘΓO avec R∆ZO comme 5 à 11.

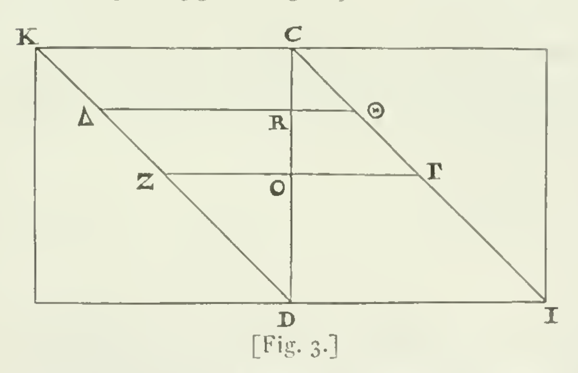
Sur le côté CD du triangle CDI soit élevé perpendiculairement le triangle CKD [Fig. 7], puis menée la droite KI. La pyramide CDIK sera maintenant le solide que l'on dit être produit par le triangle CDI avec le triangle CDK. Mais cette

[39]) Voir la note 30.

[40]) A la page 339 du T. I on trouve une déduction par J. Wallis, d'après sa méthode „arith-

EAF: Itaque junctâ CD, ea parallela & æqualis erit lineis PS, NΦ. Ducatur secundùm DC planum DBC parallelum basi EΠF, fietque semiparabola BDC æqualis & similis semiparabolæ ΠΦN; & erit ΦBN dimidius cylindrus parabolicus; DACB verò dimidiata ungula. Hæc autem æquatur sicut antea ostendimus, duabus quintis cylindri dimidiati, basin habentis DBC & altitudinem BA. Ergo quum semicylindrus ΦBN habeat altitudinem BΠ triplam ipsius BA, erit ungula dimid. DACB ad semicyl. ΦBN, ut 2 ad 15, hoc est, ut 8 ad 60.

Junctâ porrò ΦΠ, constat semiparabolam ΠΦN ad triangulum ΠΦN esse ut 4 ad 3; sed triangulus ΠΦN est ad rectangulum ΦP ut 1 ad 6, (est enim basis ΠN tertia pars ipsius NP) hoc est, ut 3 ad 18. Ergo ex æquo erit semiparab. ΠΦN ad rectang. ΦP ut 4 ad 18. Itaque & semicylindrus ΦBN est ad parallelepipedum ejusdem altitudinis super basi ΦP, ut 4 ad 18. Dicti autem parallepipedi dimidium est prisma DNS; ergo semicylindrus ΦBN est ad prisma DNS, ut 4 ad 9, hoc est, ut 60 ad 135. Qualium igitur partium dimidiata ungula DACB erat 8, talium semicylindrus parab. ΦBN erat 60, (ut suprà ostensum est) taliumque prisma DNS erit 135. Ac proinde solidum AΠSD, quod ex istis tribus componitur, erit 203. Est autem ungula dimidiata ADCB ad dimidiatam ungulam EAPΠ, ut 1 ad 32, sicut Cl. Vir demonstravit in prop. 95. lib. 9. [39]) Ergo qualium partium ungula dimid. ADCB est 8, talium erit dimid. ungula EAPΠ 256, quoniam ut 1 ad 32, ita est 8 ad 256. Diximus autem partem sol. AΠSD esse talium 203. Igitur dim. ungula EAPΠ est ad partem AΠSD ut 256 ad 203; & dividendo pars reliqua EDSΦ ad partem AΠSD, ut 53 ad 203; quod erat demonst. Ostendimus igitur illud quoque solidum, quod suprà diximis fieri ex ductu plani EΞS [Fig. 4] in planum EMAS, eam habere rationem ad solidum ortum ex ductu plani SΞΣP in planum SAΠP, quam 53 ad 203 [40])



[Fig. 3.]

Tandem ad alterum eorum quæ demonstrare promisimus accedamus, repetitâque parte mediâ schematis triplicis quod suprà descriptum fuit [Fig. 3], ostendendum sit; solidum ortum ex ductu plani CΘR in planum CKΔR, ad solidum ex ductu plani RΘΓO in planum RΔZO eam habere rationem, quam 5 ad 11. Supra latus CD trianguli CDI, erigatur ad perpendiculum triangulum CKD [Fig. 7], & jungatur KI. Erit jam pyramis CDIK illud solidum quod intelligitur fieri ex ductu trianguli CDI in triangulum

métique" du même rapport, comme aussi de celui de 5 : 11 dont Huygens va s'occuper maintenant.

pyramide étant coupée ſelon OΓ par le plan AZOΓ, lequel ſoit perpendiculaire à la baſe CDI, la ſection ſera un carré, c'eſt-à-dire un rectangle aux côtés ΓO, OZ, et cette ſection diviſera la pyramide en deux parties égales. Mais lorſqu'elle eſt coupée par le plan EΔRΘ, parallèle au précédent, ſelon la droite RΘ, il en réſultera un rectangle ER conſtruit ſur les droites ΘR et RΔ. Il faut donc prouver que le ſolide KCREΔ eſt au ſolide ΔAOΘΔ comme 5 à 11.

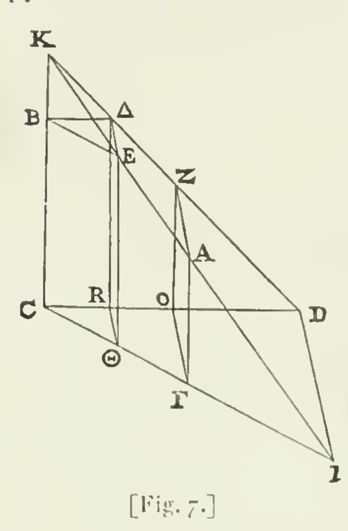
Qu'il ſoit mené ſelon EΔ le plan ΔEB parallèle à la baſe CDI, ce plan découpera la pyramide BEΔK ſemblable à la pyramide entière CIDK, et qui ſera par conſéquent à cette dernière comme les cubes des côtés homologues BΔ et CD. Mais BΔ, parce qu'elle eſt égale à CR, ſera le quart du côté CD. Donc des parties dont la pyramide BEΔK en contient une, la pyramide CIDK en contiendra 64; et ſa moitié, c'eſt-à-dire le ſolide KAOC 32.

Mais, des parties dont la pyramide BEΔK en contient une, le priſme BER en contient 9, parce qu'ils ont la baſe commune BEΔ et que la hauteur du priſme eſt triple de celle de la pyramide BK. Donc le ſolide KCREΔ, qui conſiſte de ces deux enſemble, ſera de 10 parties telles que le ſolide KAOC en contient 32. Il paraît donc que le ſecond eſt au premier comme 16 à 5, et par conſéquent, par diviſion et converſion, que le ſolide KCREΔ eſt au ſolide ΔAOΘΔ comme 5 à 11; ce qu'il fallait montrer.

FIN.

CDK. Etenim ſectâ pyramide plano AZOΓ ſecundum OΓ, quod rectum ſit ad baſin CDI, erit ſectio quadratum, id eſt, rectangul. quod ſit ex lineis ΓO, OZ; eademque ſectio dividet pyramidem biſariam. Secta item plano EΔRΘ priori parallelo, ſecundùm lineam RΘ, exiſtet inde rectangulum ER, quale continetur lineis ΘR, RΔ. Oportet itaque oſtendere, quòd ſolidum KCREΔ eſt ad ſolidum ΔAOΘΔ, ut 5 ad 11.

Ducatur ſecundùm EΔ planum ΔEB parallelum baſi CDI; abſcindet illud pyramidem BEΔK ſimilem toti pyramidi CIDK, quæque proinde erit ad hanc in triplicata ratione laterum homologorum BΔ ad CD. Sed BΔ, cum ſit æqualis ipſi CR, quarta pars eſt lateris CD. Itaque qualium partium pyramis BEΔK eſt unius, talium pyramis CIDK erit 64: & dimidium hujus, hoc eſt, ſolidum KAOC erit 32. Qualium autem pyramis BEΔK eſt unius, talium quoque priſma BER eſt 9; quoniam baſin habent communem BEΔ, & priſmatis altitudo BC tripla eſt ad altitudinem pyramidis BK. Ergo ſolidum KCREΔ quod ex hiſce duobus componitur, erit partium 10, qualium ſolidum KAOC eſt 32. Apparet igitur hoc eſſe ad illud ut 16 ad 5; ideoque dividendo & convertendo ſolidum KCREΔ eſſe ad ſolidum ΔAOΘΔ, ut 5 ad 11: quod erat oſtendendum.



[Fig. 7.]

ERRATA.

Pag. 2. *lin.* 10. *poſt* KN etc. *deeſt*, diametro BD parallelæ. *Pag.* 7 *lin.* 4 *poſt hypocol* [41]) *interſere* multòque major quam AD ad DH [42]).

FINIS.

---

[41]) Dans l'exemplaire que nous possédons le mot „hypocol." a été biffé et remplacé à la plume par „DF."

[42]) A ces „errata", Huygens, dans l'exemplaire que nous possédons, a encore ajouté à la plume: pag. 20, lin. 11 dele comma ante *ad*. Pag. 37. lin. 4, lege, Quoties ratio sol. MΞ ad Sol. ΛΣ contineat rationem sol.

De ces „errata" imprimés et écrits nous avons tenu compte dans le texte; voir les notes 1 (p. 288), 5 (p. 294) et 27 (p. 328).

TABLES.

I. PIÈCES ET MÉMOIRES.

II. PERSONNES MENTIONNÉES.

Dans cette liste on a rangé les noms sans avoir égard aux particles telles que *de*, *la*, *van*, et autres.

Les chiffres gras désignent les pages où l'on trouve des renseignements biographiques.

Les chiffres ordinaires indiquent les pages où les personnes nommées sont citées.

III. OUVRAGES CITÉS.

Les chiffres gras déſignent les pages où l'on trouve une deſcription de l'ouvrage.
Les chiffres ordinaires donnent les pages où il eſt queſtion de l'ouvrage.

IV. MATIÈRES TRAITÉES.

Dans cette Table les matières ſcientifiques traitées dans ce Volume XI ont été groupées ſous divers articles généraux, ſavoir :

Algèbre.	Géométrie.	Optique.
Arithmétique.	Hydroſtatique.	Philoſophie.
Aſtronomie.	Mécanique.	Phyſique.
Chronométrie.	Muſique.	
Cours des études des frères Huygens.	Œuvres.	

Pour connaître tous les endroits où quelque ſujet eſt traité, on cherchera dans la Table l'article général auquel il appartient. On y trouvera, ſoit du ſujet même, ſoit d'un ſous-article qui devra y conduire, la nomenclature adoptée dans l'ordre alphabétique de la Table.

Les chiffres indiquent les pages.

On a marqué d'un aſtériſque les endroits qui ont été jugés les plus importants.

L'article *Œuvres* ſe rapporte aux écrits de Huygens, ſoit publiés, ici ou ailleurs, ſoit ſeulement ébauchés.

CORRECTIONS.

Page	Au lieu de	lisez
56 l. 14	duplum	duplam
73 *note* 15 l. 12	plutô	plutôt
176 *note* 82 ligne 4 d'en bas	„Theoremato"	„Theorema 10"
290 ligne 5 du Théor.	lefquels	lefquelles
292 „ 13	circonfcrit	circonfcrite
296 „ 13	recttangle	rectangle
298 „ 11 d'en bas	circonfcrit	circonfcrites
300 „ 1	réfi	réfi-
„ „ 6	tiré	tirée
306 „ 13 d'en bas	égal	égale
318 „ 6 et 4 d'en bas	décrits	décrites
326 „ 14	foit	fois

SOMMAIRE.

